Útržky z analýzy v komplexním oboru (aktualizováno 14. února 2024)

Na základě přednášek k předmětu M6170 Analýza v komplexním oboru (doc P. Zemánek) velkou část zapsal M. Polách, za což mu patří obrovský dík. Stejně tak velké poděkování patří i M. Halaštové za opravu vskutku nemalého množství chyb a překlepů.

Obsah

0. Historický exkurz imaginární krajinou 2
1. Komplexní čísla 18
2. Nekonečné řady v $\mathbb{C}$ 36
3. Základy kalkulu v $\mathbb{C}$ 48
4. Funkční a mocninné řady v $\mathbb{C}$ 78
5. Elementární funkce 78
6. Integrál, křivkový integrál a primitivní funkce 78
7. Cauchyho teorie a některé další vlastnosti holomorfních funkcí 84
8. Laurentova řada 96
9. Teorie reziduí 101

> *Le plus court chemin entre deux vérités dans le domaine réel passe par le domaine complexe.*

(*Nejkratší cesta mezi dvěma fakty z reálného oboru vede přes obor imaginární.*)

Toto je zkrácená verze původního výroku

> *It has been written that the shortest and best way between two truths of the real domain often passes through the imaginary one.*

od Jacquese Hadamarda z *An Essay on the Psychology of Invention on the Mathematical Field* (Princeton University Press, 1945). Sousloví „It has been written“ odkazuje na knihu Paula Painlevéa *Analyse des travaux scientifiques* (Gauthier–Villars, 1900), kde je v úvodu napsáno

> *The natural development of this work soon led the geoeters in their studies to embrace imaginary as well as real values of the variable. The theory of Taylor series, that of elliptic functions, the vast field of Cauchy analysis, caused a burst of productivity derived from the generalization. It came to appear that, between two truths of the real domain, the easiest and shortest path quite oftes passes through the complex domain.*

A my se vás o pravdivosti těchto slov pokusíme přesvědčit v následujícím textu.

0. Historický exkurz imaginární krajinou

Zkoušeli jste někdy vypočítat $\sqrt{\infty}$?

There was a young fellow from Trinity
Who took $\sqrt{\infty}$
But the number of digits
Gave him the fidgets
He dropped Math and took up Divinity

Bol raz mladý muž zo Strečna
Ktorý sa pustil do $\sqrt{\infty}$
Ale z toho počítania
Dostal sa do podráždenia
Zanechal Matematiku a pustil sa do Pobožna

Mladík, jehož sláva bude věčná,
spatřil odmocninu z nekonečna,
rozechvěl se z počtu číslic,
ale nabyl čisté mysli:
počítání odloží,
lépe býti Syn Boží.

(slovenská verze je od M. Polácha a česká od J. Frýdka – mockrát díky!!). Náplní tohoto textu naštěstí není řešení této snad až absurdní úlohy, ale místo toho se budeme věnovat oblasti matematiky spojené s jinými odmocninami, které po mnoho staletí byly zcela nepřípustné, poté vzbuzovaly velký odpor a rozepře, aby se z nich (a důsledků jejich existence) staly velmi účinné a užitečné nástroje pro řešení mnoha praktických úloh. Řeč je totiž o odmocninách ze záporných čísel. V této úvodní kapitole se pokusíme zodpovědět následující otázky:

(i) Co je komplexní číslo?

(ii) Co je i? Jaký byl důvod pro jeho „zavedení“?

Komplexní analýza je oblast matematiky věnovaná studiu funkcí, jejichž argumentem a/nebo funkční hodnotou jsou komplexní čísla, tj. čísla ve tvaru $z = a + ib$ pro $a, b \in \mathbb{R}$ a $i := \sqrt{-1}$. Avšak aby tato teorie mohla být úspěšně rozvíjena, bylo zapotřebí se nejdříve „vypořádat“ s (tj. přijmout) komplexní čísla.

V roce 1878 dvojice bratrů (v blízké době stanouce se nechvalně známými zloději) Ahmed a Mohammed Abd er-Rassulové náhodou narazili na starověké egyptské pohřebiště v Údolí králů v Deir el-Bahri. Velmi rychle se tak dostali k úspěšnému obchodu s prodejem kradených relikvií, jednou z nichž byl také matematický papyrus. Jeden z bratrů jej v roce 1893 prodal ruskému egyptologovi Vladimiru Semyonovichi Golenishchevovi, který jej následně v roce 1912 věnoval Muzeu výtvarných umění (též Puškinovo muzeum) v Moskvě. Zde zůstal zahalen tajemstvím až do úplného přeložení v roce 1930, kdy se vědecký svět dozvěděl o matematické vyspělosti starověkého Egypta. Jedná se o soubor 25 řešených matematických úloh na svitku dlouhém asi $5,5$ metru a širokém $3,8$–$7,6$ centimetrů pocházející pravděpodobně z doby kolem roku 1850 př.n.l. Např. ve 14. problému Moskevského matematického papyru (jak se dnes nazývá) je konkrétní početní příklad na výpočet objemu V seříznuté pyramidy se čtvercovou základnou (tj. jedná se vlastně o komolý jehlan). Tento problém silně podněcuje pocit, že egypťané znali vzorec

$$V = \tfrac{1}{3} h(a^2 + ab + b^2),$$

kde a, b jsou délky hran horního a dolního čtverce a h je výška. Někteří to označují za „dech beroucí“ a „mistrovské dílo egyptské geometrie“. Pro někoho, kdo ovládá základy integrálního

počtu, je odvození tohoto vzorce „snadné“ cvičení, ale je již mnohem méně jasné, jak tento vzorec objevili Egypťané (bez znalosti integrálů).

Ačkoli je tento vzorec správně, má jednu drobnou vadu na kráse. Hodnoty a, b bychom mohli označit za „očividné“, tj. snadno je změříme přiložením metru. Hodnota h již tak snadno změřitelná není, tedy určitě ne pro stojící pyramidu. Pochopitelně ji můžeme snadno dopočítat pomocí znalostí z geometrie a trigonometrie, ale mnohem lepší by bylo vyjádřit objem nikoli pomocí h, ale pomocí c – délky boční hrany jehlanu, která je opět přímo měřitelná. Zdá se, že to se poprvé povedlo Herónovi Alexandrijskému (obvykle je považován za Řeka, ale je to Egypťan) v 1. stol.n.l. v knize *Stereometrie* věnované příkladům z $\mathbb{R}^3$ pro výpočet povrchů a objemů, kde odvodil

$$h = \sqrt{c^2 - 2\Big(\frac{a-b}{2}\Big)^2}.$$

S pomocí tohoto vzorce určil objem pro jehlan s $a = 10$, $b = 2$ a $c = 9$. Pak se pustil do téhož problému s $a = 28$, $b = 4$ a $c = 15$. Jenže místo

$$h = \sqrt{15^2 - 2\Big(\frac{28-4}{2}\Big)^2} = \sqrt{81 - 144}$$

vzal

$$h = \sqrt{144 - 81} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7},$$

tj. místo $3\sqrt{-1}\sqrt{7}$ vzal pouze $3\sqrt{7}$, a určil hledaný objem. Ignorování záporného znaménka pod odmocninou je způsobeno faktem, že záporné veličiny nebyly představitelné v řecké (helénistické) matematice (antická matematika zavrhovala záporná čísla jako bezvýznamná, neboť neviděli žádnou možnost, jak fyzikálně interpretovat číslo „menší než nic“). Tímto Herón vlastně propásl jedinečnou příležitost stát se prvním učencem, který odvodil/použil odmocninu ze záporného čísla v matematickém řešení fyzikálního problému. To by bylo více než 1000 let před tím, než matematici vůbec začali připouštět takovou možnost, a o dalších 500 let dříve, než to začali brát alespoň trochu vážně. Místo toho zcela ignoroval skutečnost, že takový komolý jehlan *nemůže existovat*. Na druhou stranu, kdyby Herón nějak mlžil o svém výpočtu, draze by za to zaplatil ztrátou své slávy.

Zatímco Herón se celkem jistě bál výskytu odmocnin ze záporného čísla ve zmíněné úloze, jeho alexandrijský následovník o 2 století později, Diofantos, zcela vědomě podobnou příležitost odmítl. Diofantos je prvním matematikem, který řešil ryze algebraické rovnice a založil pro ně systém značek. Bývá považován za „algebraického Eukl(e)ida“ kvůli jeho nejslavnějšímu dílu *Aritmetika* sestávajícího ze 13 knih (dodnes je zachována pouze polovina), srovnej s Eukl(e)idovými *Základy* (oba shromáždili výsledky dnes již zapomenutých matematiků a zveřejnili je v ucelené podobě; Eukl(e)idova práce je ale asi přeci jen „lepší“, neboť se jedná o teorii rovinné geometrie vybudované na logicky uspořádaných argumentech, zatímco v Diofantově případě jde o soubor řešených úloh bez vybudování hlubšího teoretického aparátu – nicméně i tak se jedná o dílo s velmi podnětnými úlohami pro studenty i v dnešní době). V šesté knize najdeme následující úlohu (22. problém): *Je dán pravoúhlý trojúhelník s obsahem 7 jednotek^2 a obvodem 12 jednotek. Určete jeho strany.* V řešení odvodil Diofantos kvadratickou rovnici

$$172x = 336x^2 + 24,$$

kde $P_1 := 1/x$ a $P_2 := 14x$ jsou hledané délky stran. Diofantos zapsal kvadratickou rovnici právě v této podobě, aby všechny koeficienty byly kladné – což souvisí s odmítáním záporných čísel zmíněným u Heróna (Diofantos v 5. problému ve druhé knize píše, že *rovnice* $4x + 20 = 4$ *je absurdní, neboť by vedla k nemožnému řešení* $x = 4$). V souladu s tímto postojem, Diofantos počítá odmocniny pouze z kladných čísel při určování kvadrátů, a tudíž odmocniny záporných čísel by byly jednoduše „za čárou“. Kvadratická rovnice z Diofantovy úlohy vede na hodnoty

$$x_{1,2} = \frac{172 \pm \sqrt{(-172)^2 - 4 \cdot 336 \cdot 24}}{2 \cdot 336} = \frac{43 \pm \sqrt{-167}}{168}.$$

Jenže toto není Diofantovo řešení – on pouze napsal, že *řešení není možné*, čímž měl na mysli, že rovnice nemá racionální řešení, neboť „polovina koeficientu u x vynásobená sama sebou mínus součin koeficientu u x^2 a jedničky“ musí být čtverce, aby existovalo racionální řešení, zatímco

$$\left(\frac{172}{2}\right)^2 - 336 \cdot 24 = -668$$

jistě není čtvercem. O odmocnině z tohoto záporného čísla Diofantos vůbec nic neříká.

O 600 let později (cca 850 n.l.) hinduistický matematik Mahaviracharya se také věnuje této problematice, jenže vlastně dochází k tomu, co Herón a Diofantos praktikovali již o několik let dříve: *Čtverec kladné stejně jako záporné veličiny je kladný a odmocnina těchto čtverců je správně kladnou i zápornou veličinou. Jenže záporná veličina není ve své podstatě čtverce nějaké veličiny, takže nemůže mít odmocninu*. Uplynula řada století než se tento názor podařilo změnit.

Nyní se přesuneme na začátek 16. století. Ale pro lepší pochopení souvislostí se nejdříve posuňme na konec 15. století. Františkánský mnich Luca Pacioli (cca 1445–1514) ve své knize *Suma de Arithmetica, Proportioni et Proportionalita* z roku 1494 shrnuje dosavadní poznatky z aritmetiky, algebry (včetně kvadratických rovnic) a trigonometrie a odvážně prohlašuje o řešení *kubických* rovnic, že „je za současného stavu vědeckého poznání stejné jako kvadratura kruhu“. *Kvadratura kruhu* je problém známý již od dob řeckého matematika Hippokrata z doby kolem roku 440 př.n.l. Jde o úlohu , jejímž cílem je pouze pomocí pravítka (nekonečné délky a bez značek pro měření) a kružítka (s jehož pomocí lze udělat kružnici o libovolném poloměru), tj. pomocí tzv. *Eukl(e)idovské konstrukce*, sestrojit čtverec a kružnici se stejným obsahem. V Pacioliho době se jednalo o nevyřešený (otevřený) problém a nejspíše to ve svém textu myslel jako měřítko obtížnosti problému kubických rovnic. Jenže kvadratura kruhu je problém největší obtížnosti, neboť v roce 1882 Ferdinand von Linemann dokázal, že číslo e^{α} je transcendentní pro libovolné nenulové algebraické číslo (tj. číslo, které je kořenem nenulového polynomu s racionálními koeficienty), z čehož plyne, že také číslo π je transcendentní. Toto tvrzení je známo jako Lindemannova–Weierstrassova věta, neboť druhý jmenovaný tento výsledek v roce 1885 zobecnil (někdy se hovoří i o Hermitově–Lindemannově–Weierstrassově větě, neboť Charles Hermit v roce 1873 dokázal speciální případ této věty). Pacioli se ovšem (jak my již dnes samozřejmě velmi dobře víme) spletl a ukázalo se to o pouhých deset let později. Italský matematik Scipione del Ferro (1465–1526) z boloňské univerzity totiž objevil, jak vyřešit tzv. *redukovanou* kubickou rovnici, tj. speciální případ kubické rovnice, ve které nevystupuje kvadratický člen. Z dnešního pohledu to byl první a velmi významný krok na cestě k pochopení $\sqrt{-1}$. Del Ferro tedy řešil rovnici

$$x^3 + px = q$$

s tím, že stejně jako Diofantos o 1500 let dříve se vyhýbá záporným koeficientům. Díky tomu a s použitím jednoho „kouzla“/triku/geniální myšlenky nalezl jediný reálný kořen jakožto

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

případně

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Máme-li jeden reálný kořen, pak (po troše námahy) dokážeme vyjádřit polynom ve tvaru

$$(x - x_1)(x^2 + ax + b)$$

a s využitím vzorce pro kořeny kvadratického polynomu vypočítat zbývající dva komplexní kořeny. To samozřejmě del Ferro ani jeho následovníci neudělali – je zajímalo pouze hledání jednoho reálného a kladného kořene, a to jim del Ferrův vzorec dával, takže vše bylo v pořádku. Ale co třeba rovnice $x^3 - 6x = 20$, tj. $p = -6 < 0$? Del Ferro by samozřejmě takovou rovnici nikdy nenapsal. Místo toho by vzal $x^3 = 6x + 20$. Tím vlastně ze svého pohledu dostal zcela nový problém

$$x^3 = px + q$$

pro $p, q > 0$. Jenže to by bylo zbytečné, neboť del Ferrův vzorec funguje i pro $p < 0$ a dává reálný kořen v případě $q^2/4 + p^3/27 \geqslant 0$. Ještě se jednou pozastavme nad problémem se zápornými čísly. Např. anglický matematik John Wallis (1616–1703, autor symbolu ∞, značení pro mocniny, pojmu řetězový zlomek), se kterým se ještě později setkáme, ve své knize *Arithmetica Infinitorum* z roku 1665 (kniha ovlivnila také Isaaca Newtona) uvádí toto: „Protože $a : 0$ pro $a > 0$ je kladné nekonečno a protože $a : b$ pro $b < 0$ je záporné číslo, pak musí být záporné číslo větší než kladné nekonečno, protože dělitel ve druhém podílu je menší než dělitel v prvním podílu ($b < 0$).“ To vedlo Wallise k udivujícímu závěru, že záporné číslo je současně menší než 0 a větší než $+\infty$. A pak ho obviňujte z ostražitosti před zápornými čísly. A to v tom pochopitelně nebyl sám. I takový velkým matematik Leonhard Euler ve své knize *Algebra* z roku 1770 uvádí pochybné vysvětlení toho, proč „minus krát minus je plus“.

Del Ferro udržoval svůj vzorec v tajnosti, což v té době bylo zcela běžné. Dnes vědci své výsledky samozřejmě zveřejňují, neboť by jim (zejména ty matematické) nebyly příliš k užitku a také potřebují získat „čárky“, „body“ a sbírat „akademické bobříky“. Jenže v té době byl del Ferro a jeho kolegové spíše nezávislými obchodníky. Vydělávali si na živobytí ve vzájemných veřejných soubojích v řešení problémů, kde vítěz bere vše – snad peníze, jistě slávu a, má-li štěstí, také podporu obdivujícího a bohatého mecenáše. A jednou z možností, jak takový souboj vyhrát, byla právě znalost řešení problému, kterou ostatní neměli.

Del Ferro si téměř znalost řešení redukované kubické rovnice vzal do hrobu. Zmínil se o tom pouze hrstce nejbližších přátel. Jedním z nich byl i jeho zeť Hannibal Nave, který by také matematikem, zaujal jeho místě na univerzitě a zdědil jeho poznámky (viz dále). Od něj se to dozvěděl i del Ferrův student Antonio Maria Fior. Ačkoli Fior nebyl příliš dobrým matematikem, taková znalost se pro něj stala velmi účinnou zbraní, takže se v roce 1535 pustil do souboje s mnohem známějším a nekonečněkrát schopnějším matematikem Niccolou Fontanem (1499/1500–1577). Fontana se dostal do Fiorovi pozornosti, neboť nedávno oznámil, že umí vyřešit kubickou

rovnici ve tvaru $x^3 + px^2 = q$. Fior se domníval, že Fontana pouze blafuje a že ve skutečnosti takové řešení nemá. Takže ho považoval za ideální oběť zralou na oškubání při veřejné soutěži.

Fontana, který je dnes znám pod přezdívkou „Tartaglia“ (= koktavec, což byla narážka na jeho vadu řeči způsobenou hroznou ránou mečem do čelisti, kterou utržil při napadení francouzským vojákem ve 12 letech), tušil, že Fior zná tajemství řešení redukované kubické rovnice od del Ferra. V obavě, že by součástí souboje mohly být právě takové rovnice a on by je nebyl schopen vyřešit, pustil se s obrovským odhodláním do řešení redukované kubické rovnice. Řešení se mu podařilo získat pouhý jeden den před konáním souboje (a stačilo pouze být motivován tím, že to již někdo dokázal…jako ve sportu…). Tartagliův objev společně s jeho znalostí řešení rovnice $x^3 + px^2 = q$ (on skutečně neblafoval) vedly k naprosté porážce Fiora: každý dal soupeři 30 úloh a zatímco Fior nevyřešil žádnou z Tartagliových, Tartaglia vyřešil všechny Fiorovy.

Tak jako del Ferro i Tartaglia držel své vzorce v tajnosti, a to ze stejného důvodu. Chystal se je zveřejnit v knize, o které si myslel, že ji jednoho dne napíše (jenže nenapsal). Zpráva o jeho drtivém vítězství nad Fiorem se šířila a brzy se také dostala k uším GirolamaCardana (1501–1576). Cardan (na rozdíl od Fiora) disponoval mimořádným intelektem a (mimo jiné) byl výborným matematikem. Tartagliova znalost řešení redukované kubické rovnice v Cardanovi vzbudila velký zájem a naléhal na Tartagliu, aby mu tajemství prozradil. Po počátečním odmítnutí, Tartaglia podlehl a dal Cardanovi vzorec pro řešení, ale nikoli jeho odvození – ovšem pouze pod příslibem držení v tajnosti.

Cardan nebyl svatý, ale také to nebyl mizera. Téměř jistě měl v úmyslu ctít slib mlčení, jenže pak se začal dovídat o tom, že Tartaglia nebyl první, komu se podařilo vyřešit redukovanou kubickou rovnici. A jakmile spatřil dochované poznámky od del Ferra, Carda se již dále necítil být vázán slibem mlčení. Cardan pro sebe (znovu) odvodil Tartagliovo řešení a zveřejnil jej ve své knize *Ars Magna* (Velké dílo) vydané v roce 1545. V této knize je uvedeno konkrétní uznání Tartagliovi a del Ferrovi, jenže Tartaglia cítil křivdu a spustil bouři prohlášení obviňujících Cardana z plagiátorství či něčeho horšího. Tartagliovi obavy ze ztráty slávy se naštěstí nenaplnily. Samozřejmě on i del Ferro mají skutečné prvenství v řešení redukované kubické rovnice, jenže vzorce jsou od doby Ars Magna známy jako cardanovy (ale to už se tak někdy stává, viď l'Hospitale…). Na druhou stranu ukázal, jak je rozšířit na obecnou kubickou rovnici. Jednoduchou substitucí převedl rovnici na redukovanou, kterou pak vyřešil pomocí del Ferrova vzorce. Jenže zde je (jak již bylo zmíněno) háček – co když $q^2/4 - p^3/27 < 0$? Cardan se ovšem imaginárních čísel nebál. To je vidět v jedné ze slavných úloh v Ars Magna: *rozdělit číslo 10 na dvě části tak, aby součin byl 40*. Cardan nazývá takové problémy „očividně nemožné“, neboť to veden na rovnici

$$x^2 = 10x - 40,$$

kde x a $10 - x$ jsou ony dvě části. To je ale rovnice s komplexními kořeny. Ty Cardan nazývá *sofistické*, neboť u něj neviděl žádný fyzikální význam. Jedná se o $5 \pm \sqrt{-15}$. Součet je jistě 10, ale součin? Cardan směle napsal „nicméně upravováním…“ a formálně počítá

$$(5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 5^2 - 5\sqrt{-15} + 5\sqrt{-15} - \sqrt{-15}\sqrt{-15} = 25 + 15 = 40.$$

Jak dále píše „zanedbáním obsaženého mentálního utrpení“ v úpravách, tj. počítání s $\sqrt{-15}$ jako s každým jiným číslem, vše funguje, jak má.

Nicméně, ačkoli se již takových čísel nebál, je z jeho dalších slov jasné, že se na ně díval s více než malým podezřením: „Takto delikátně s početně dostaneme ke konci, který (jak se říká) je

stejně rafinovaný jako neužitečný.“ To, co ale skutečně nešlo Cardanovi na rozum, je situace, kdy se v Cardanově vzorci objevují odmocniny ze záporných čísel, ačkoli rovnice má očividně reálný kořen. Co tím máme na mysli? Uvažme např. $x^3 = 15x+4$. Pak jeden kořen je $x_1 = 4$ a další kořeny (po troše námahy) jsou $x_{2,3} = -2 \pm \sqrt{3}$, tj. všechny tři kořeny jsou reálné, jenže v Cardanově vzorci máme $p = 15$ a $q = 4$, takže $q^2/4 = 4$ a $p^3/27 = 125$, a tudíž

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} - \sqrt[3]{-2+\sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}. \tag{0.1}$$

Z dnešního pohledu víme (nebo později snad již vědět budeme), že jde o součet dvou komplexně sdružených čísel, tj. skutečně takto dostaneme reálný kořen. Jenže Cardan toto nevěděl a frustrován touto situací nazýval takové polynomy jako *ireducibilní*. Dá se ukázat, že taková situace nastane právě tehdy, když polynom $x^3 = px + q$ má právě 3 reálné kořeny. Zde vstupuje na scénu italský architekt–inženýr Rafael Bombelli (1526–1572), který ve své *Algebře* z roku 1572 objasňuje, proč (0.1) dává reálný kořen jakkoli divoce zapsaný: $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2+\sqrt{-1}$ a $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2-\sqrt{-1}$, čímž je snad definitivně vyřešena poslední záhada kolem kubických rovnic – nicméně ještě zbývá fyzikální význam $\sqrt{-1}$. Samozřejmě se také nabízí otázka proč nemít vzorec pro ireducibilní případ, s jehož pomocí bychom určili všechny 3 reálné kořeny přímo. Takový vzorec skutečně máme a jeho autorem Francoise Viete (1540–1603), který nebyl profesionálním matematikem, nýbrž právníkem ve službách státu (francouzského) za vlády králů Jindřicha III a IV. Tento vzorec není příliš známý a je založen na funkcích kosinus a arkuskosinus (vzorec byl publikován posmrtně v roce 1615)

$$x = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3\sqrt{3}\,q}{2p\sqrt{p}}\right)\right),$$

což vyžaduje $-1 \leqslant \frac{3\sqrt{3}\,q}{2p\sqrt{p}} \leqslant 1$ neboli $\frac{9\cdot 3\,q^2}{4p^2\cdot p} \leqslant 1$, což je ekvivalentní s $q^2/4 - p^3/27 \leqslant 0$ (neboli ireducibilní případ). Možná by se věci hnuly dopředu více, kdyby Viete mohl zveřejnit svůj vzorec o 100 let dříve…

Ještě zde dodejme, že i tak velký matematik, jakým byl Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), měl potíže s porozuměním/interpretací (0.1). V dopise (z 1673–1675) Christianu Huygensovi Leibniz zmiňuje svůj slavný (neřkuli vrcholný) výsledek

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}} = \sqrt{6},$$

o kterém píše „Nepamatuji si, že bych si v celé analýze všiml více výjimečného a paradoxního výsledku; myslím, že jsem první, kdo převedl iracionální kořeny v imaginárním tvaru do reálných hodnot…“ (samozřejmě nebyl prvním, tím byl o 100 let dříve Bombelli). Také píše „Nerozumím jak veličina může být reálná, když je vyjádřena pomocí imaginárních či nemožných čísel.“ Matoucí pro něj také byla rovnost

$$\sqrt{-1}\sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = -1,$$

což je zcela nekonzistentní se známým faktem $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$. Leibniz také diskutoval např. s Johannem Bernoullim (1667–1748). Leibniz tvrdil, že logaritmy záporných čísel neexistují, neboť: „Jelikož logaritmy čísel z intervalu $[1,\infty)$ vyčerpávají nezáporná čísla a logaritmy čísel z intervalu

$(0,1)$ vyčerpávají všechna záporná čísla, na logaritmy záporných čísel proto již žádné hodnoty nezbývají.“ Na to Bernoulli oponoval takto

$$(-x)^2 = x^2 \quad \Longrightarrow \quad 2\ln(-x) = 2\ln(x) \quad \Longrightarrow \quad \ln(-x) = \ln(x),$$

např. $\ln(-1) = \ln 1 = 0$. Ani druhý tvůrce diferenciálního počtu (Isaac Newton /1642–1727/) komplexním číslům nepřikládal velký význam.

A nakonec ještě dvě poznámky ke kvadratickým a kubickým polynomům:

(i) komplexní kořeny se dají najít i s pomocí pravítka, kružítka a grafu těchto polynomů;

(ii) někteří z nás se možná na střední škole učili, že imaginární jednotka $i = \sqrt{-1}$ je řešením kvadratické rovnice $x^2 + 1 = 0$ a že absence právě takového řešení vedla ke vzniku komplexních čísel. To zní velmi srozumitelně, jenže jsme si právě ukázali, že to není pravda – byly to totiž kubické rovnice, kterými to všechno začalo. Rovnice typy $x^2 + 1 = 0$ matematiky příliš netrápily a jednoduše je nazývali „nemožné“.

Matematici 16. století velmi ctili řeckou tradici v geometrii a byly pro ně nepříjemné pojmy, pro které neměli geometrický význam. Snad nepřekvapí, že 200 let po Bombelliho výsledku najdeme v Eulerově Algebře z roku 1770:

> všechny výrazy typu $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$ atd. jsou nemožná nebo imaginární čísla, neboť představují kořeny záporných veličin – o takových číslech můžeme skutečně tvrdit, že nejsou ani nic, ani větší než nic, ani menší než nic, což z nich nutně dělá imaginární nebo nemožná.

Jenže Euler jde „dál“, neboť pokračuje

> Ale navzdory tomu tato čísla se objevují v mysli – existují v našich představách a máme o nich dostatečnou představu, protože víme, že $\sqrt{-4}$ znamená číslo, které vynásobenou samo sebou dává -4. Z tohoto důvodu nám nic nebrání v používání těchto imaginárních čísel ve výpočtech.

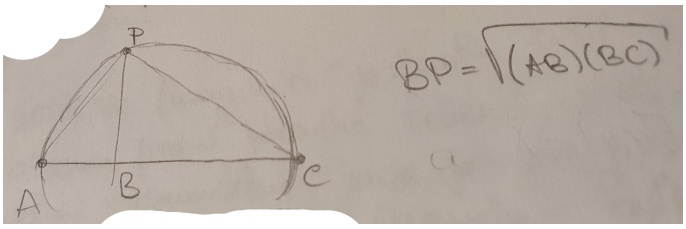
Žádné takové pochybnosti odmocniny kladných čísel nevzbuzovaly, neboť bylo (alespoň částečně) známo, jak je konstruovat. Konstrukce úseček délky rovné odmocnině přirozeného čísla pochází od Platonova učitele matematiky, Theodory z Kyrény, pro čísla od 3 do 17 (tzv. *Theodorova spirála*), což rozšířil Theaitétos z Atén na libovolné přirozené číslo (všechna jeho práce je ztracena, ale víme o tom z Platonova díla). Jinou úlohou je konstrukce úsečky, jejíž délka je rovna odmocnině délky dané úsečky. Toto pochází od Reného Descartese (1596–1650) z jeho knihy *La Geometrie* z roku 1637, ačkoli to explicitně neuvádí. Však také v závěru píše: „Doufám, že příští generace mě budou soudit vlídně, a to nejen pokud jde o věci, které jsem vysvětlil, ale také pokud jde o ty, které jsem záměrně vynechal tak, abychom ponechal druhým potěšení z objevu.“ Muž vskutku se smyslem pro ironii… Desacartesova konstrukce pochopitelně pracuje s odmocninami z kladných délek. Jenže co by geometricky mohla znamenat odmocnina ze záporné hodnoty? Podle Descartese byla taková geometrická konstrukce naprosto nemožná. Descartes ve své knize také ukazuje, jak geometricky nalézt řešení kvadratických rovnic, např. $z^2 = az + b^2$ nebo $z^2 = az - b^2$ nebo $z^2 + az = b^2$, ale variantu $z^2 + az + b^2 = 0$ neuvažuje, neboť to dává pouze komplexní kořeny. Samozřejmě takto získává pouze reálné kořeny (dokonce i dvojnásobný kořen „ignoruje“). Descartes také píše:

> ... skutečné (= reálné) kořeny stejně jako falešné kořeny nejsou vždy reálné, ale občas pouze *imaginární*, tj. můžeme si je představit, jak jsem řekl v každé rovnici, ale občas neexistuje žádná veličina, která odpovídá tomu, co si představujeme. Tak jak si umíme představit tři kořeny v rovnici $x^3+13x=6x^2+10$, existuje pouze jeden, kterým je 2, a pro zbývající dva, třebaže jsou zvětšovány, zmenšovány, násobeny ve smyslu, který jsme právě objasnil, nemohou být vylíčeny jinak než pomyslně (imaginárně).

A tak se takovým kořenům začalo (bohužel trochu nešťastně) říkat *imaginární*. Skutečně nelze najít nějaký geometrický význam pro komplexní čísla? Již jsme se zmínili o Johnu Wallisovi, Ještě v roce 1675 měl zřejmě nejasnosti ohledně propojení „algebraického imaginárna“ a geometrie. Avšak v roce 1685 se mu podařilo učinit velký pokrok. Šlo o geometrické řešení úlohy ohledně geometrické průměru, tj. pro daná čísla nalézt x takové, že

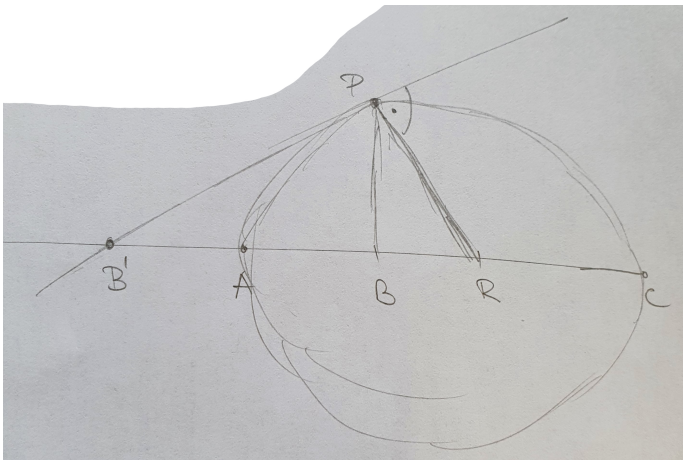
$$\frac{b}{x}=\frac{x}{c}.$$

Samozřejmě, že výsledkem je $x=\sqrt{b\cdot c}$. Řešení lze získat z obrázku



Obrázek 1

Wallis současně rozlišoval při měření délky znaménko, tj. vzdálenost A a B je kladná pro A nalevo od B a záporná pro A napravo od B. V situaci na Obrázku 1 umístil Wallis počátek do bodu A, takže obě vzdálenosti byly kladné. Nyní své úvahy posunul do situace, ve které jedna ze vzdáleností bude záporná, tj. bude „odmocňovat záporné číslo“

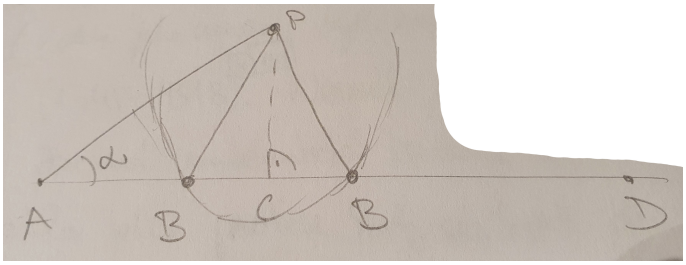


Obrázek 2

A pak

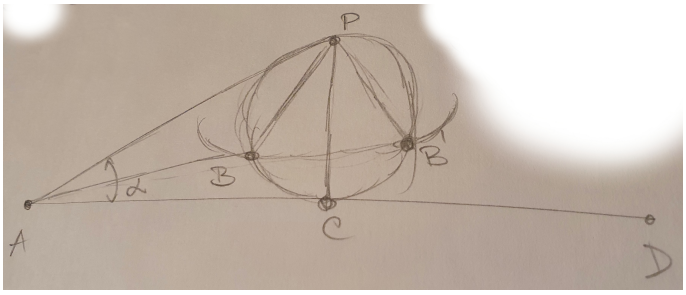
$$B'P = \sqrt{(AB')(B'C)}.$$

Tedy první „geometrický“ obraz odmocniny ze záporného čísla. Samozřejmě toto se zdá být celkem přitažené za vlasy – „důmyslné, ale sotva přesvědčivé“. Wallis z toho také nebyl zrovna nadšený a byla to taková rozcvička – nyní se podíváme na zcela jinou úlohu, která vše již začíná posouvat správným směrem k odhalení geometrického tajemství $\sqrt{-1}$. Jedná se o klasickou úlohu: sestrojit trojúhelník, jsou-li dány dvě strany a úhel, který ovšem není mezi těmito stranami. Řešení vypadá takto



Obrázek 3

pro dané strany PB a PA a úhel $\alpha = \angle PAD$. Úloha je nejednoznačná a výsledkem jsou dva trojúhelníky PAB a PAB′. V algebraickém pohledu na úlohu hraje důležitou roli vztah mezi PC a PB. Jestliže totiž $PC > PB$, pak zde začnou vystupovat odmocniny ze záporného čísla, což podle Descartese mělo znamenat, že geometrická konstrukce hledaného trojúhelníku je nemožná. Je tomu skutečně tak? Wallisův pohled na úlohu říkal, že tomu tak není. Podívejme se na to zadání ještě jednou – není zde řečeno, že daný úhel má být jedním z úhlů výsledného trojúhelníku (jenom to řešení má být určeno oběma stranami a tímto úhlem). Řešení vypadá takto



Obrázek 4

Tedy vrcholy B a B′ nyní neleží na AD.

Wallis se tedy zastavil v okamžiku, kdy (v jistém smyslu) geometrickým znázorněním imaginárních čísel je vertikální pohyb v rovině. Wallis pochopitelně toto nikde nenapsal a z naší strany jde vlastně o zpětnou interpretaci toho, co bylo učiněno, se znalostmi o více než 3 století dále. Nicméně ač chyběl pouze kousek, stále nebyla odpověď úplná, a tak Wallis je dnes znám ze zcela jiných důvodů než kvůli statečnému ale chybnému boji s geometrií komplexních čísel

(vyjma historiků a nás). Správnou odpověď dal až o 100 let později norsko–dánský (v době jeho narození bylo Norsko součástí Dánska) kartograf Caspar Wessel (1745–1818). V té době se již leccos vědělo o algebraických vlastnostech čísel ve tvaru $a + bi$ (viz později), ale bez geometrické interpretace a geometrických pravidel pro sčítání a násobení. Wessel nebyl profesionálním matematikem a ani v jeho rodině žádá matematická tradice nebyla. Ale k řešení problémů mu právě pomohla jeho profese, kdy se každý den setkával s praktickými problémy souvisejícími s tvorbou map, tj. s naměřenými daty zadávanými v podobě roviny nebo sférického mnohoúhelníku (mnohoúhelník na kouli). Dne 10. března 1797 přednesl před Dánskou akademií přednášku *On the Analytic Representation of Direction: An Attempt*. Související článek byl přijat k publikaci a vyšel v roce 1799 v akademickém časopise. Pro dokreslení kvalit a významu ještě poznamenejme, že se jednalo o prvního ne-člena Akademie, kterému se to povedlo. Jenže článek byl napsán v dánštině a ještě k tomu v časopise, který mimo Dánsko nebyl příliš čtený. Proto Wesselův skvělý článek byl odsouzen k nevýznamnosti. A to až do roku 1895, kdy byl znovuobjeven. Jeho článek ukazuje, jak pracovat s komplexními čísly v polárním (goniometrickém) tvaru = vektory, tj. jak je sčítat a hlavně *násobit* (což není zrovna zřejmé). Tím se dostáváme také k tomu, co je geometricky $\sqrt{-1}$ – vektor délky 1 pod úhlem $\pi/2$, tedy imaginární osa je kolmá na reálnou osu. Možná ani Wessel nebyl úplně první s touto myšlenkou. Augustin-Lious Cauchy se ve své knize z roku 1847 zmiňuje o jistém Henrim Dominiqueu Truelovi a stejné myšlence již z roku 1786. Jenže o Truelovi není dnes vůbec nic známo a zdá se, že svůj výsledek snad ani nikdy nepublikoval. Stejně tak existují některé indicie, které naznačují, že také Gauss měl tutéž ideu již v roce 1796 – ale v té době nic takového nenapsal. Tedy prvenství v tomto ohledu patří Wesselovi, ačkoli dnes hovoříme o Gaussově rovině komplexních čísel (viz dále). Wessel se také dopracoval k reprezentaci vektorů (= komplexních čísel) pomocí trigonometrických funkcí, tj. komplexní číslo délky 1 s úhlem φ je

$$1\angle\varphi = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

což umožňuje mnohem snadnější práci s násobením (násobení $\sqrt{-1}$ znamená otočení o úhel $\pi/2$ proti směru hodinových ručiček; proto je $\sqrt{-1}$ též operátor rotace) a pro $m \in \mathbb{Z}$ dostává rovnost

$$\left\{1\angle\frac{\varphi}{m}\right\}^m = \left\{\cos(\varphi/m) + \sqrt{-1}\sin(\varphi/m)\right\}^m = 1\angle\varphi$$

neboli pro m-tou odmocninu

$$\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^{1/m} = \cos(\varphi/m) + \sqrt{-1}\sin(\varphi/m).$$

Toto není původní Wesselův výsledek (ale získal jej mnohem elegantněji), neboť se jedná o tzv. *Moivreeovu větu* pojmenovanou pro francouzském matematikovi Abrahamu de Moivreovi (1667–1754). Ve svém článku z roku 1698 se dokonce zmiňuje o tom, že jisté analogické vyjádření Moivreovy věty bylo již v roce 1676 známo Newtonovi a používal jej pro výpočet třetích odmocnin v Cardanových vzorcích. De Moivre se to tedy zřejmě naučil od něj a používal to ve svém životytí jakožto „řešitele matematických problémů“. Jednalo se o velmi talentovaného muže perfektně znalého v teorii pravděpodobnosti a jejím aplikování v hazardu. V roce 1718 objevil křivku, která dnes nese Gaussovo jméno. Tradičně se také vypráví, že Newton často odpovídal na matematické otázky větou: „Zeptejte se pana de Moivrea, který o tom ví víc než já.“ Nicméně zbývá podotknout, že ani de Moivre nikde výše uvedený výsledek explicitně nenapsal – to učinil až v roce 1748 Euler ve zcela jiném kontextu.

Moiverova věta umožnila Wesselovi počítat celočíselné odmocniny z libovolného komplexního čísla, např. píše

$$\sqrt[3]{4\sqrt{3}+4\sqrt{-1}} = 2\angle 10^\circ$$

(ačkoli neuvádí žádné přesné zdůvodnění). Wessel si ale také byl vědom skutečnosti, že stejně jako existují dvě druhé odmocniny čísla, musí být m čísel pro m-tou odmocninu. Navíc ale také věděl, že se musí lišit o tentýž úhel, tj. v uvedeném příkladě jde o $2\angle 10^\circ$, $2\angle 130^\circ$ a $2\angle 250^\circ$. S využitím Moivreovy věty můžeme snadno ověřit platnost rovností, se kterými se potýkal Cardan a Leibniz, tj. reálné číslo vyjádřené pomocí komplexních čísel. Dá se také snadno odvodit rozvoj čísla π pomocí nekonečného součinu

$$\frac{2}{\pi} = \cos(\pi/4)\cdot\cos(\pi/8)\cdot\cos(\pi/16)\cdot\cos(\pi/32)\cdots = \prod_{k=2}^{\infty}\cos(\pi/2^k) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\,\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots,$$

který pochází již od Vieta z roku 1593!

Každopádně Wessel zavedením komplexní roviny dramaticky rozšířil koncept čísel. Před tím všechna čísla byla reálná vztažená na jednodimenzionální x-ovou osu (= reálnou osu = přímka). Nyní se obor všech možných čísel rozšířil do 2-dimenzionální roviny, která je nekonečná ve všech směrech nikoli pouze vlevo a vpravo. Objev komplexních čísel završil dlouhý proces rozvoje čísel, který začal přirozenými čísly (počítání na prstech) rozšířenými o kladná racionální a iracionální čísla, pak o záporná až k číslům komplexním. Obor komplexních čísel je uzavřený vzhledem ke všem standardním aritmetickým operacím. Ať s nimi děláte cokoli, zůstanete zde (zatímco $\sqrt{-1}$ není reálné číslo).

Vzhledem k osudu Wesselova článku snad není příliš překvapivé, že se stále hledala odpověď pro geometrickou interpretaci $\sqrt{-1}$. To, co však překvapivé je, že v roce 1806 se objevují 2 takové práce, které snad již definitivně tuto otázku uzavírají. Obě práce vznikly nezávisle na sobě a také na Wesselově článku (alespoň to tak vypadá). První z nich je od Jeana–Roberta Arganda (1768–1822, Švýcar), který stejně jako Wessel nebyl profesionálním matematikem (v roce 1806 byl účetním v Paříži). Argandův článek by snad postihl ještě horší osud než ve Wesselově případě, ale shodou řady šťastných okolností se tomu tak nestalo. Argad svůj text vydal vlastním nákladem a ani jej nepodepsal! Název byl *Essay on the Geometricak Interpretation of Imaginay Quantities*, dal jej svým přátelům a zaslal několika dopisovatelům (kteří samozřejmě věděli, o koho jde i bez podpisu). V této práci se také poprvé objevuje *modul* (modulus) pro absolutní hodnotu (= velikost) komplexního čísla.

Druhou prací je 65stránkové pojednání od Abbého Adriena-Quentina Buée (1748–1826; Francouz). Na rozdíl od práce Wessela a Arganda je Buéeovo pojedná „mystické“ a méně jasné (někteří dokonce pochybují o důvodech přijetí jeho článku, který vyšel u Královské společnosti v Londýně /Akademie pro podporu věd/).

V roce 1828 vyšla v Cambridge kniha *A Treatise on the Geometrical Representation of the Square Roots of Negative Quantities* od Johna Warrena (1796–1852). Kniha by možná zapadla mezi řadou dalších, kdyby Warrenův geometrický výklad nevzbudil nesouhlas u irského matematika Williama Rowana Hamiltona (1805–1865). Hamilton inspirován touto knihou byl přesvědčen, že to může učinit lépe. Hamilton je znám především jak matematický fyzik. V 5 letech uměl latinsky, řecky a hebrejsky a v 9 letech přidal ještě perštinu, arabštinu a sanskrt (jak E.T. Bell píše: „Dobrý Bože! K čemu?!“). V roce 1824 se již stala matematika jeho vášní. V roce 1829 na

něj naléhal přítel, aby si přečetl Warrenovu knihu. Učinil tak a cítil, že algebra spojená s $\sqrt{-1}$ byla oddělená a odlišná od geometrie. Spíše měl pocit, že $\sqrt{-1}$ by mělo mít čistě algebraickou interpretaci. Jak píše o mnoho později v roce 1853: „…cítil jsem se nespokojený s každým pohledem, který nedává *imaginárnům* od počátku jasnou interpretaci a smysl, a přál jsem si, aby to bylo učiněno pro odmocniny ze záporných čísel bez zavádění úvah tak výslovně geometrických jako těch, které zahrnují pojem úhlu.“ Hamilton se domníval, že stejně jako geometrie je vědou prostoru a tato věda našla své matematické vyjádření v Eukl(e)idových Základech, tak algebra by také měla být vědou *něčeho* v naší hmotné existenci. Rozhodl se, že tímto *něčím* bude čas, což je myšlenka pochycená z Kantovy filosofie, a prohlašoval, že čas musí být to, o čem všem je algebra spojená s $\sqrt{-1}$. S touto myšlenkou nebyl Hamilton první – ta se vyskytuje již v Buéeově práci, kterou Hamilton četl (Hamilton samozřejmě nevěděl o jiných geometriích /neeukl(e)idovských/ a ani o jiných algebrách /Booleanovské etc./). Každopádně v červnu 1835 přednesl před Irskou akademií přednášku *Theory of Conjugate Functions or Algebraic Couples: with a Preliminary Essay on Algebra as a Science of Pure Time*, kde (mimo jiné, zejména metafyzice algebry jakožto vědy času) zavedl komplexní čísla jako *uspořádané dvojice* reálných čísel. Definoval sčítání a násobení pro tyto dvojice přesně tak, jak si brzy ukážeme. Hamilton tyto operace definuje, takže zde není žádný prostor por debatu (on samozřejmě věděl, že komplexní čísla takto fungují). Každopádně jeho matematicky zcela „čistá a abstraktní“ dvojice (a, b) není nic jiného než jiný způsob zápisu $a + ib$. Jenže Hamilton považoval tento přístup za mnohem lepší, neboť se vyhýbá onomu absurdnímu objektu $\sqrt{-1}$. Ještě poslední poznámka k Hamiltonovi. On samozřejmě věděl, že násobení $\sqrt{-1}$ nebo pro něj dvojicí $(0, 1)$ znamená otočení o $\pi/2$ i v jeho algebře. Snad možná s trochou ironie vzhledem k jeho odmítání geometrického pohledu na komplexní čísla, tato geometrická vlastnost jej přivedla k dalšímu matematickému hledání, které ho uchvátilo po zbytek života. Tak jako $\sqrt{-1}$ otáčí vektory v rovině, co otáčí vektory v prostoru? To ho přivedlo ke kvaternionům nebo hyperkomplexním číslům (matice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{smallmatrix}\right)$ hraje roli $\sqrt{-1}$ v teorii $2n \times 2n$ matic – takové matice jsou ukryty v srdci kvantové teorie).

V době, kdy Hamilton publikoval své výsledky ohledně „dvojic“, geometrická interpretace komplexních čísel již obdržela razítko „schváleno“ od intelektuálního giganta Carla Friedricha Gausse (1777–1855). V roce 1831 (čtyři roky před Hamiltonem) prezentoval své vlastní geometrické ideje ohledně komplexních čísel v memoárech Královské společnosti v Göttingenu. Jak jsme již zmínili, Gauss se k tomuto dostal již v roce 1796. Jenže (stejně jako u jiných jeho prací) odkládal zveřejnění, dokud vše nebude „tak akorát“ (v roce 1812 v dopise Pierru Laplaceovi napsal: *Mám ve svých poznámkách mnoho věcí, u kterých bych možná mohl ztratit prvenství v jejich publikování, ale Ty víš, že upřednostňuji nechat věci dozrát.*). A pro komplexní čísla nastal tento čas v roce 1831 – pojem *komplexní* vlastně pochází právě od něj. Gaussovo porozumění komplexním číslům se ale také vyvíjelo v průběhu let. Např. ve své disertační práci věřil, že komplexní čísla nemusí být úplná (uzavřená). Tato „více komplexní“ čísla nazýval *vera umbrea umbra* (*opravdové stíny stínů*). Později si samozřejmě uvědomil, že tomu tak není. Na jeho počest se tedy rovina komplexních čísel někdy nazývá *Gaussovou rovinou* (snad s výjimkou Francie s Argandovou rovinou). Komplexní čísla tvaru $a + ib$ pro $a, b \in \mathbb{Z}$ se také nazývají *Gaussova celá čísla*. Až díky Gaussovi byla $\sqrt{-1}$ přijata za legitimní symbol. Při příležitosti 50letého výročí od jeho doktorátu (1849) mu v blahopřejném projevu bylo řečeno *Učinil jste nemožné možným* (*You have made possible the impossible*). Anglický matematik G.H. Hardy na Gaussovu adresu poznamenal, že to byl první matematik, který použil komplexní čísla „skutečně přesvědčivým a vědeckým způsobem“, ačkoli řada matematiků s nimi zcela rutinně pracovala ještě před Gaussovým dílem z roku 1831.

Nicméně vše nebylo tak růžové. Hamiltonův přítel Augustus de Morgan v roce 1831 píše: *Ukázali jsme, že symbol $\sqrt{-1}$ nemá žádný význam nebo spíše je v rozporu sám se sebou a absurdní.* De Morganův skepticismus pokračoval i v roce 1849: *Pokud by student chtěl dále prozkoumat tvrzení ostatních autorů, kteří prohlašují to, čemu každý z nich říká* Vysvětlení $\sqrt{-1}$*, udělá dobře pokud použije malé „v“.* Nicméně nebyl to ignorant, takže zvládá svůj odpor a ukazuje studentům výpočty související s mocninami komplexních čísel. Jak se píše *Na počátku svého příběhu byla komplexní čísla $a+b\sqrt{-1}$ považována za „nemožná čísla“ tolerovaná pouze v některých oblastech, neboť se zdála být užitečná při řešení kubických rovnic. Ovšem jejich význam se ukázal být geometrický a konečně vedl ke sjednocení algebraických funkcí s konformními zobrazeními, teorií potenciálu a jiné „nemožné“ oblasti neeukl(e)idovské geometrie. Toto geometrické rozřešení paradoxu $\sqrt{-1}$ bylo tak mocné, nečekané a nádherné, že pouze slovo „zázrak“ se zdá být adekvátním pro jeho popis.*

Ale stále byli někteří velmi odolní: anglický matematik a královský astronom (v období 1835–1881) George Airy (1801–1892) prohlásil *Nemám sebemenší důvěru v jakýkoli výsledek, který je v podstatě získán pomocí imaginárních symbolů.* Pět let po Gaussově výročí nazval anglický logik George Boole (1815–1864) výraz $\sqrt{-1}$ za „neinterpretovatelný symbol“ ve svém vrcholném díle z roku 1854. Ještě v 80. letech 19. století byla situace tak daleko, že o několik desítek let později jeden ze studentů matematiky a Anglii napsal *... byla to doba, kdy použití $\sqrt{-1}$ bylo podezřelé dokonce i v trigonometrické formuli... imaginární* i *bylo spíše považováno za nedůvěryhodného vetřelce...* Změny se hold prosazují těžko dokonce i v matematice.

Jelikož jsme naši procházku směřovali geometrickým směrem, minuli jsme (nejméně) 2 velikány, kteří zásadně ovlivnili teorii komplexních funkcí, což je to, co nás primárně zajímá. Ačkoli se dnes za počátek moderní teorie komplexních čísel považuje Wesselův článek, mnoho vlastností $\sqrt{-1}$ bylo známo dlouho před ním (jak psal Euler – imaginárnost nebrání v používání). Prvním z nich je švýcarský matematik Leonhard Euler (1707–1783). Syn vesnického pastora, který studoval v Basileji na pastora. Současně ale navštěvoval sobotní odpolední přednášky Johanna Bernoulliho (1667–1748), který byl v té době považován za největšího evropského matematika a zřejmě měl ten nejdůležitější vliv na mladého Eulera, jehož otec se s rodinou Bernoullliů znal. Johann Bernoulli také přesvědčoval Eulerova otce, že Leonhard je předurčen k tomu, aby byl skvělým matematikem, Ačkoli zůstal zbožným mužem, není žádných pochyb o tom, že byl především matematikem. A to takovým, že jej od matematiky neodradila ani slepota v 70 letech (měl totiž úžasnou paměť). Jeho reputace byla taková, že byl znám jako „ztělesněn analýzy“. Euler byl od roku 1727 na Ruské akademii věd v Petrohradě, kam jej od roku 1725 lákali synové Johanna Bernoulliho (Nicolas, který roku 1726 zemřel, a Daniel), se kterými se seznámil během studií (byli ale starší). A tak v roce 1727 vstoupil do Ruska (v roce 1726 dokončil disertaci), kde se v roce 1731 (bylo mu 24 let) stal profesorem. Jenže pouhých pár dní před příjezdem do Ruska zemřela carevna Kateřina I. Alexejevna (manželka Petra I. Velikého, který tuto akademii v roce 1724 založil i na radu Leibnize). Na trůn nastoupil 12letý vnuk Petr II. a situace se v Rusku i v důsledku sporů o trůn zhoršila a akademie ztrácela sympatie. A tak, když Eulera pozval pruský král Fridrich II. Veliký na Akademii v Berlíně, aby tam přijal podobné místo, s radostí přijal a zůstal v Berlíně od 1741 do 1766. Berlín opustil a vrátil se do Ruska, neboť se intelektuální prostředí výrazně zlepšilo díky Kateřině II. Veliké, která v roce 1762 nastoupila na trůn. To samozřejmě naopak zhoršilo Eulerovy osobní vztahy s Fridrichem II. Velikým. Euler zemřel náhle v 76 letech na mozkovou mrtvici. Jen pro srovnání dvou matematických velikánů: v roce 1735 řešil Euler jistý astronomický problém z Francouzské akademie věd, který již několik měsíců zajímal několik vynikajících matematiků Euler našel řešení

během 3 dnů vylepšením své vlastní metody. Jenže jeho úsilí jej uvrhlo do horeček, což postupně vedlo až téměř ke slepotě na pravé okov roce 1738. Tento stejný problém se Gaussovi podařilo vyřešit pomocí ještě lepší metody během 1 hodiny!

Euler si v letech 1727–1746 dopisoval s Johannem Bernoullim a 17. října 1740 mu napsal, že řešení diferenciální rovnice

$$y'' + y = 0 \quad \& \quad y(0) = 2 \quad \& \quad y'(0) = 0$$

může být zapsáno ve dvou tvarech

$$y(t) = 2\cos t \quad \& \quad y(t) = e^{t\sqrt{-1}} + e^{-t\sqrt{-1}}.$$

Odtud Euler usoudil, že ačkoli jsou obě funkce tak odlišné, musí si být rovny, tj.

$$2\cos t = e^{t\sqrt{-1}} + e^{-t\sqrt{-1}}.$$

Z téhož dopisu je také zřejmé, že věděl o rovnosti

$$2i\sin t = e^{t\sqrt{-1}} - e^{-t\sqrt{-1}}.$$

V roce 1748 Euler v knize *Introductio in Analysis Infinitorum* uvádí

$$e^{\pm it} = \cos t \pm i\sin t$$

(pomocí nekonečných řad). Nicméně se sluší v této souvislosti upozornit také na anglického matematika Rogera Cotese (1682–1716, zemřel náhle a krátce před 34. narozeninami; ve 26 letech se stal profesorem na Cambridge), o kterém Newton prohlásil *Kdyby byl býval žil, mohli jsme se něco dozvědět.* Ale Newton se trochu pletl – v roce 1714 zveřejnil výsledek, který říká světu něco extrémně důležitého a který mu mohl přinést věčnou slávu, kdyby to napsal jenom trochu jasněji. Tento výsledek byl asi ještě o něco znám de Moivreovi. Dnes jsme mohli hovořil o Cotesově identitě, místo toho většina ze studentů Cotesovo jméno ani nepotká... Cotes odvodil vzorec pro povrch tělesa vzniklého rotací 1/4 elipsy (té, co leží v prvním kvadrantu) kolem osy y. Při tom se dopracoval k rovnosti

$$-\sqrt{-1}\,\varphi = \ln(\cos\varphi - i\sin\varphi),$$

od čehož už je jenom krůček k $e^{\sqrt{-1}\,\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$ – jenže ten Cotes neudělal. A tak tato rovnost se zdá být ukrytý v až neuvěřitelně tajemném jazyce jeho jediného článku *Logometria* napsaného během jeho života v roce 1714. Zde Cotes také správně vyčísluje číslo e a $1/e$ na 12 desetinných míst pomocí nekonečných řad – to je o desítky let dříve než Euler, který dal 32 desetinných míst v roce 1748. Nepomohlo ani posmrtné vydání Logometrie společně s jinými díly v knize z roku 1722. Její skvělý obsah zůstal nepovšimnut (nebo alespoň výpočet pro povrch). Po závěrečném komentáři ohledně násobení $\sqrt{-1}$, což jistě mohlo být matoucí pro některé čtenáře v roce 1714, Cotes zakončil své výpočty zvláštními slovy: *toto ale ponechávám k podrobnějšímu prozkoumání těm, kterým to za to stojí.* Po téměř 2 století si nikdo nemyslel, že to má smysl, neboť to zůstalo nepovšimnuto až do roku 1899 (o 185 let později), kdy se to objevuje v knize ruského matematika o historii funkcí. Není asi úplně zřejmé, proč tomu tak bylo – ale Cotes byl velmi dobře známý tím, že dával odpovědi téměř bez jakéhokoli objasnění pro čtenáře o tom, kde

se berou. Prostě mu asi čtenáři v té době jednoduše nerozuměli v tom, co Cotes myslí – poučení pro nás pro všechny ohledně hodnoty jasného vysvětlení (= samotné řešení není příliš zajímavé).

Zpět k Eulerovi. Věnoval se také otázce $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$. Sice nebyl první, ale jako první zjistil, že $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ je reálné číslo a že jich je nekonečně mnoho. Euler také s využitím komplexních čísel někdy mezi 1776 a svojí smrtí v 1783 odvodil

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

(integrálsinus – vyšší transcendentní funkce), což je velmi důležitá výsledek pro teorii elektronického přenosu informací. Od Eulera (z roku 1777) pochází také symbol i použitý místo $\sqrt{-1}$, který následně převzal Gauss, a proto jej používáme dodnes (v elektroinženýrství /nebo celkově ve fyzice/ se užívá spíše j, neboť i značí proud). Navzdory tak skvělým výsledkům by ovšem bylo chybou se domnívat, že pro Eulera (stejně jako pro většinu v polovině 18. století) byla manipulace s komplexními čísly „přirozená“ a vše mu bylo jasné. Jeho pochybnosti z Algebry (1770) jsme již zmínili. Zde také popisuje pravidla pro počítání s ryze imaginárními čísly. Součin $\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-3}$ je -3, $\sqrt{-4} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}$ a dále:

> *Navíc, jelikož $\sqrt{a}$ vynásobená $\sqrt{b}$ je $\sqrt{ab}$, měli bychom mít $\sqrt{6}$ pro $\sqrt{-2}$ vynásobenou $\sqrt{-3}$ a $\sqrt{4}$ neboli 2 pro hodnotu součinu $\sqrt{-1}$ a $\sqrt{-4}$. Tudíž vidíme, že dvě (ryze) imaginární čísla vynásobená mezi sebou dávají reálné nebo skutečné číslo…*

Jenže

$$\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-2} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{6}\cdot\sqrt{-1}\sqrt{-1} = -\sqrt{6}.$$

Euler ukázal, že lze s pomocí komplexních čísel dosáhnout řady zajímavých výsledků. A proto jistě nepřekvapí, že dalším zcela přirozeným krokem v rozvoji teorie komplexních čísel je studium funkcí, jejichž proměnné nejsou jenom reálná čísla nýbrž komplexní čísla – což je přesně obsahem našeho kurzu. Počátky této teorie jsou spojeny především s baronem Augustinem–Liousem Cauchym (1789–1857) a jeho výsledky tykající se integrace v komplexním oboru, které prezentoval 22. srpna 1814 (jeden den po 25. narozeninách) před Francouzskou akademií věd v pojednání o určitých integrálech (*Memoir on Definite Integrals*). My řadu z těchto výsledků potkáme v průběhu našeho výkladu, nicméně zdůrazníme, že Cauchy systematicky rozděloval všechny rovnice v komplexním oboru na dvě. V úvodu ke své knize z roku 1821 píše, že všechny takové rovnice by měly být interpretovány jako dvojice rovnic (dnes asi celkem přirozené). A snad i v nich spatříme krásu celé komplexní analýzy jako např. ve výsledku

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{e}.$$

Cauchy se narodil doprostřed Francouzské revoluce. Jeho otec byl vysokým vládním úředníkem a v roce 1793 ze strachu z Jakobínské hrůzovlády uprchl i s rodinou na jejich venkovské sídlo v Arcneil. Prvního vzdělání se mladému Cauchymu dostalo od otce. Po konci hrůzovlády (1794) se vrátili zpět do Paříže, kde Cauchyho otec získal nové úřednické místo a po nástupu Napoleona Bonaparteho se z něj stal generální sekretář Senátu, kde pracoval přímo pod Pierrem Simonem Laplacem (který je dnes znám spíše jako matematický fyzik než politik – Napoleon z něj udělal ministra vnitra) a senátorem Josephem–Louisem Lagrangem (1736–1813, ukázal skutečnou sílu

Taylorovy věty, neboť své úvahy zakládal na rozvinutelnosti v mocninné řady; ovšem po jeho smrti tento přístup začíná skomírat…). Ti také poznali Cauchyho matematický talent a Lagrange údajně řekl: *Nenechte toto dítě před sedmnáctým rokem života dotknout se žádné matematické knihy. Když si nepospíšíte, abyste mu zajistil základní literární vzdělání, tak bude jeho nadání promarněno. Stane se velkým matematikem, ale umí sotva psát svojí rodnou řečí.*

Otec Lagrange naštěstí poslechl. Coby vynikající student vyhrál Cauchy mnoho cen za latinu a humanitní vědy. Rozhodl se být inženýrem a v roce 1805 nastoupil na École Polytechnique jako druhý z 293 uchazečů v přijímacím řízení. Po dokončení studií nastoupil v roce 1810 jako inženýr na stavbě přístavu, ze kterého chtěl Napoleon zaútočit na Anglii. V roce 1812 ovšem onemocněl (přepracování a asi i následky podvýživy z dětství, kdy žili mimo Paříž). Již během práce v přístavu se věnoval i matematice a pokračoval v tom i na následné 3leté neplacené „nemocenské“. V Cauchyho životě hrála politika velkou roli, neboť po celý život byl fanatickým stoupencem rodiny Bourbonů. Když byl v roce 1815 Napoleon poražen u Waterloo, nastoupil na trůn Ludvík XVIII právě z této rodiny. A tak když byli z politických důvodů vyloučeni z Akademie věd Lazar Carnot a Gaspard Monge, Cauchy s radostí přijal královo jmenování (tj. bez „výběrového řízení“) na Mongeho místo (tím si samozřejmě Cauchy udělal hodně nepřátel ve vědeckých kruzích). V roce 1830 byla ve Francii další revoluce, a když na trůn nastoupil král Ludvík Filip nepatřící do rodiny Bourbonů, rozhodl se pro exil (na 4 roky bez rodiny, část té doby trávil i v Praze). Toto období je jistou přestávkou v Cauchyho matematické práci. Do Francie se vrátil v roce 1838, jenže odmítl složit slib novému králi, a tudíž nemohl zastávat post profesora. Naštěstí v roce 1839 získal místo v instituci (Bureau des Longitudes), jejíž náplní bylo zlepšení námořní navigace, standardizace měření času, geodézie a astronomická pozorování (založeno 1795 a mezi původními členy byli i Laplace a Lagrange). Jenže vzhledem k absenci slibu králi nebyla jeho pozice uznána a na následující 4 roky byl v absurdní situaci, kdy byl zvolen, ale nebyl uznán, takže pracoval bez mzdy. Jenže to tehdy bylo jeho nejvíce tvůrčí období – od 1839 do 1848 vydal více než 300 odborných článků (tj. průměrně asi 1 týdně, neboť v roce 1844 nezkoumal). Profesuru získal zpět v roce 1849 po únorové revoluci z roku 1848. Jenže ta byla pro jeho rodinu těžkou ranou. Nastoupil Napoleon III, kterému také nesložil slib (historie se opakuje), ale tentokrát dostal výjimku (čekal, že nastoupí Jindřich, kterého učil). V roce 1850 se zajímal o místo na Collége de France. Jenže si vybrali Liouvillea. S tím se Cauchy nechtěl smířit (první hlasování bylo 11:10 pro Cauchyho a 2 se zdrželi), čímž mezi nimi začal spor. Ten brzy pokračoval i na vědeckém poli, kde Cauchy vyhrál (Liouvielleovo tvrzení se dalo snadno dokázat pomocí Cauchyho věty). Cauchy zemřel v roce 1857. Jeho jméno je jedním z 72 jmen vědců napsaných na Eiffelově věži jako Eiffelovo uznání vědě (je tam i Lagrange, Laplace, Legendre, Sturm, Poisson, Monge, Fourier, Navier, Carnot,…).

Cauchyho politické přesvědčení (roajalismus) a náboženské nadšení mu v celém životě udělalo mnoho nepřátel. Norský matematik Niels Henrik Abel jej nazval *bigotním katolíkem* a napsal o něm, že *je šílený (pomatený) a nedá se s tím nic dělat. Ovšem v současnosti je jediný, kdo ví, jak by se měla dělat matematika.* Přesně tak – pamatujeme si Cauchyho jméno kvůli jeho všelijakým sporům nebo jeho novým výsledkům, které jsou opravdu skvělé (včetně definice limity /ne přes $\varepsilon - \delta$, ačkoli to v důkazech již používal/)?

Existuje také přímý důkaz z Gaussových vlastních dopisů před 1814, že věděl řadu z toho (ne-li více), co Cauchy vydal v memoárech v roce 1814. Jenže v souladu s Gaussovským stylem – seděli si na tom, dokud to nebude „tak akorát“, takže veškerá sláva je po právu přidělena Cauchymu. Leopold Kronecker o řadu let později po smrti obou napsal, že je *velký rozdíl mezi někým, kdo zveřejňuje matematický důkaz a náznaky o jeho „záběru“, a jiným, kdo toto „jen tak“*

mimochodem diskutuje soukromě s přítelem… Samozřejmě Cauchy neudělal vše, co je známo v komplexní analýze a stavěl již na položených základech, ale jeho přínos je velmi podstatný. Mezi další důležité matematiky v tomto směru patří Bernhard Riemann (1826–1866, geometrický přístup s často fyzikálně motivovanou intuicí), Pierre Alphonse Laurent (1813–1854, Laurentova řada z roku 1843 – ta byla ve své době známa pouze proto, že o tom psal Cauchy ve Francouzské akademii věd a pobízel ho k publikování – k tomu došlo až v roce 1863 po smrti obou), Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897, autor známé $\varepsilon - \delta$ definice limity, jeho přístup vycházel z poznatků o mocninných řadách – do jisté míry tak navázal na Lagrange, místo modulu hovořil o absolutní hodnotě) a řada, řada, řada dalších…

1. Komplexní čísla

V souladu s Hamiltonovým přístupem rozumíme *komplexním číslem* uspořádanou dvojici (x, y) dvou reálných čísel $x, y \in \mathbb{R}$. První složka x se nazývá *reálná část*, druhá složka y se nazývá *imaginární část*. Položíme-li $z = (x, y)$, pak píšeme $\operatorname{Re} z := x$ a $\operatorname{Im} z := y$. *Množinu* všech *komplexních čísel* značíme $\mathbb{C}$. Na této množině pak zavádíme algebraické operace sčítání $(+)$ a násobení $(\cdot)$ jako

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v) \quad \text{a} \quad (x, y) \cdot (u, v) = (xu - yv, xv + yu)$$

Tyto dvě rovnosti také můžeme pro $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$ a $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ zapsat pomocí jednotlivých složek

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z_1 + z_2) &= \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2 \quad \text{a} \quad \operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2, \\ \operatorname{Re}(z_1 \cdot z_2) &= \operatorname{Re} z_1 \cdot \operatorname{Re} z_2 - \operatorname{Im} z_1 \cdot \operatorname{Im} z_2 \quad \text{a} \quad \operatorname{Im}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Re} z_1 \cdot \operatorname{Im} z_2 + \operatorname{Im} z_1 \cdot \operatorname{Re} z_2. \end{aligned}$$

Pak zřejmě platí

$$\begin{gathered} (x, y) + (0, 0) = (x, y), \quad (x, y) \cdot (0, 0) = (0, 0) \cdot (x, y) = (0, 0), \\ (x, y) \cdot (1, 0) = (1, 0) \cdot (x, y) = (x, y), \end{gathered}$$

přičemž komplexní číslo $(0, 0)$ nazýváme *nulovým prvkem* (*nulou*) a číslo $(1, 0)$ *jednotkovým prvkem* (*jednotkou*/*jedničkou*). *Opačným prvkem* k číslu (x, y) rozumíme číslo $-(x, y) := (-x, -y)$. *Inverzním prvkem* k číslu $(x, y) \neq (0, 0)$ pak rozumíme číslo $(x, y)^{-1} := \big(x/(x^2 + y^2), -y/(x^2 + y^2)\big)$. Přímým výpočtem se dá také snadno ukázat, že operace $+$ a $\cdot$ jsou asociativní a komutativní a platí pro ně distributivní zákon. Navíc pro každé (x, y) je opačný prvek jediným řešením rovnice $(x, y) + (u, v) = (0, 0)$ a pro $(x, y) \neq (0, 0)$ je inverzní prvek jediným řešením rovnice $(x, y) \cdot (u, v) = (1, 0)$. Proto množina $\mathbb{C}$ spolu s operacemi $+$ a $\cdot$ tvoří *netriviální komutativní těleso* či (*pole*).

Imaginární jednotkou rozumíme komplexní číslo $i := (0, 1)$. Pak platí $i^2 = (-1, 0)$. Protože

$$(x, 0) + (u, 0) = (x + u, 0) \quad \text{a} \quad (x, 0) \cdot (u, 0) = (xu, 0)$$

je množina $\mathcal{R} := \{z \in \mathbb{C} \mid z = (\alpha, 0) \text{ pro nějaké } \alpha \in \mathbb{R}\}$ s operacemi $+$ a $\cdot$ podtělesem tělesa $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. Tato množina je navíc isomorfní s tělesem $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, takže zobrazení $\alpha \in \mathbb{R} \mapsto (\alpha, 0) \in \mathbb{C}$ je vnořením tělesa $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ do tělesa $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. Množiny $\mathcal{R}$ a $\mathbb{R}$ proto budeme ztotožňovat, tj. položíme

$\alpha = (\alpha, 0)$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$. Zejména tedy

$$1 = (1,0) \quad \& \quad 0 = (0,0) \quad \& \quad (-1)\,\alpha = -\alpha$$
$$(x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (y,0)\cdot(0,1) = x + \mathrm{i}y.$$

Komplexní číslo $(x,y) = x + \mathrm{i}y$ se nazývá *imaginární*, pokud $y \neq 0$ (pro $y = 0$ máme *reálné* komplexní číslo). Je-li navíc $x = 0$, tj. máme-li imaginární číslo $(0,y) = \mathrm{i}y$, nazýváme jej *ryze imaginární*.

Odčítání pak přirozeně definujeme jako přičítání opačného prvku, tj. pro $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$ a $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ klademe

$$z_1 - z_2 \coloneqq z_1 + (-z_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2),$$

a dělení jako násobení inverzním prvkem, tj. pro $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$ a $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}\setminus\{(0,0)\}$ klademe

$$\frac{z_1}{z_2} \coloneqq z_1 \cdot (z_2)^{-1} = \left(\frac{x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{y_1\cdot x_2 - x_1\cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right).$$

Ovšem těleso $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *není uspořádané*! To znamená, že nelze na $\mathbb{C}$ definovat binární relaci $<$ lineárního uspořádání, pro kterou by platila dvojice implikací

$$z_1 < z_2 \implies z_1 + z < z_2 + z \quad \text{pro libovolné } z \in \mathbb{C},$$
$$z_1 < z_2 \quad \& \quad z > 0 \implies z_1 \cdot z < z_2 \cdot z.$$

Vskutku, kdyby to bylo možné, pak by buď $\mathrm{i} > 0$ nebo $\mathrm{i} < 0$. Jenže v prvním případě by v souladu s druhou vlastností (násobením obou stran těchto nerovností právě číslem i nebo $-\mathrm{i}$) odtud plynulo $-1 = \mathrm{i}^2 > 0$ a ve druhém případě $1 = -\mathrm{i}^2 < 0$. Vztah proto $z_1 < z_2$ tedy není definován pro žádná dvě komplexní čísla z_1, z_2 taková, že alespoň jedno z nich není reálné (tj. je imaginární). Píšeme-li tedy $z_1 < z_2$ pro komplexní čísla, máme vždy na mysli pouze případ $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$.

Číslo *komplexně sdružené* ke komplexnímu číslu $z = x + \mathrm{i}y$ definujeme jako $\overline{z} \coloneqq x - \mathrm{i}y$. Pak platí

$$\overline{(\overline{z})} = z \quad \& \quad \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad \& \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2} \quad \& \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},$$

přičemž v poslední rovnosti požadujeme $z_2 \neq 0$. Proto $z \mapsto \overline{z}$ je automorfismus $\mathbb{C}$ na $\mathbb{C}$.

Také platí

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad \& \quad y = \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}}$$

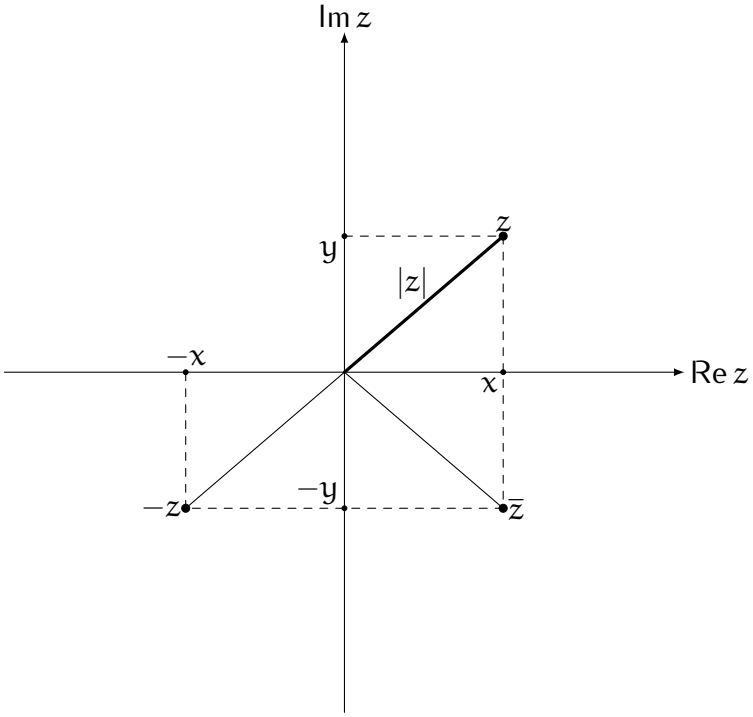
Ke každému číslu $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ lze vzájemně jednoznačně přiřadit bod $[x,y] \in \mathbb{R}^2$. Vzhledem k této bijekci nazýváme při této interpretaci $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{C}$ otevřenou komplexní (Gaussovou) rovinou a čísla $z \in \mathbb{C}$ jsou body komplexní roviny. Při této interpretaci potom $|z|$ vlastně znamená euklidovskou vzdálenost od 0 (počátku), tj. normu.

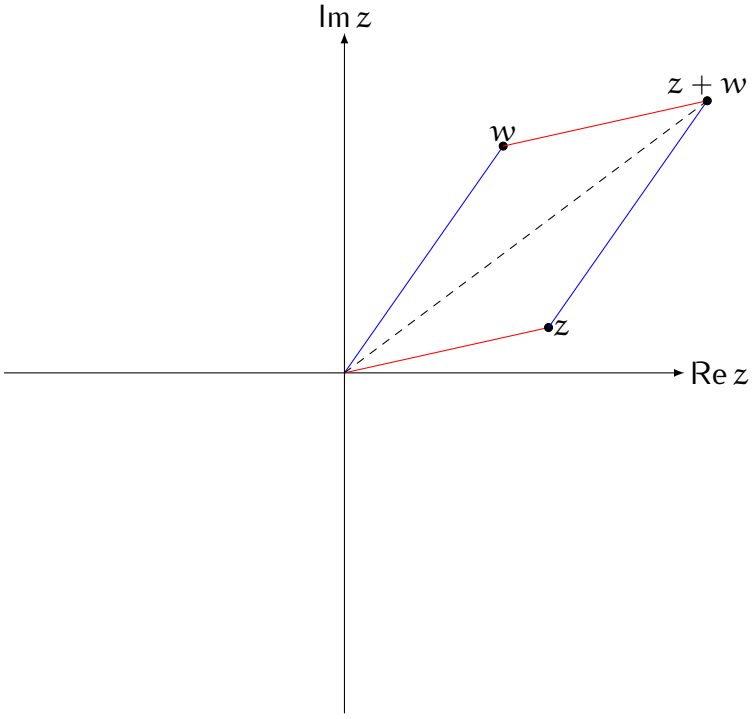
Lze tedy na $\mathbb{C}$ zavést metriku

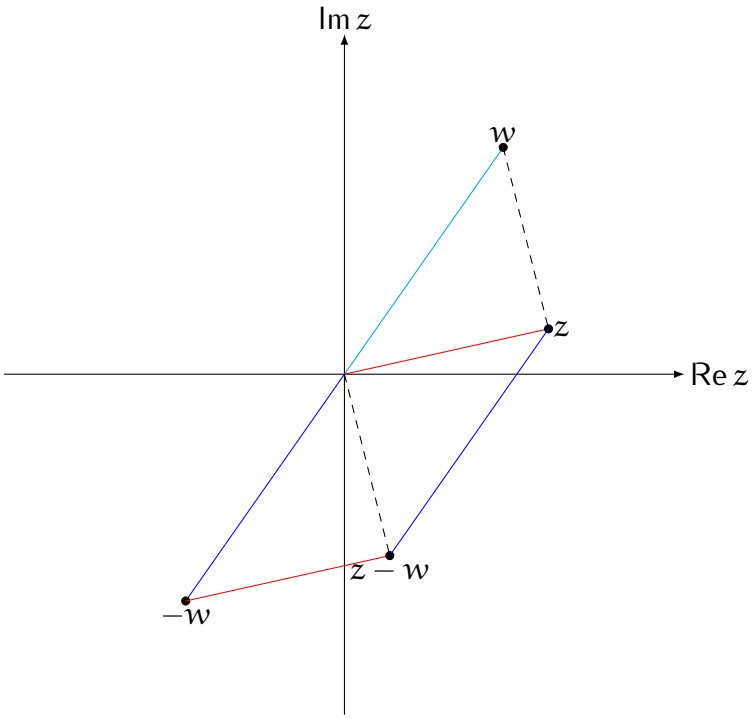
$$d(z_1, z_2) \coloneqq |z_1 - z_2|,$$

čímž z $\mathbb{C}$ uděláme úplný metrický prostor. Vzhledem k tomu, že reálným číslům $z = x \in \mathbb{R}$ ($\operatorname{Im} z = 0$) odpovídají v uvedené bijekci body x-ové osy, nazýváme ji reálnou osou. Analogicky, ryze imaginárním číslům $z = \mathrm{i}y$ ($\operatorname{Re} z = 0$) odpovídají body y-ové osy, nazýváme ji imaginární osou.

Geometrická interpretace komplexní roviny a operací +,-:


Im z
z
y
|z|
−x
Re z
x
−y
−z
z̄


Im z
z + w
w
z
Re z



Je zřejmé, že $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$. Zobrazení $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$ má také další obvyklé vlastnosti absolutní hodnoty, tj.

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad \& \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad , \quad z_2 \neq 0 \tag{1.1}$$

$$\Big||z_1| - |z_2|\Big| \overset{(*)}{\leqslant} |z_1 \pm z_2| \overset{\triangle\text{-nerovnost}}{\leqslant} |z_1| + |z_2| \tag{1.2}$$

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} z_j \cdot w_j\Big|^2 \underset{\text{nerovnost}}{\overset{\text{Cauchyho-Schwarzova}}{\leqslant}} \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} |w_j|^2 \tag{1.3}$$

Důkaz. (1.1) Zřejmé

(1.2) $\triangle$-nerovnost (Michal Veselý, MA, str.296).
Nech $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Potom jistě platí

$$\begin{gathered}
(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \geqslant 0 \\
\Updownarrow \\
2x_1x_2y_1y_2 \leqslant (x_1y_2)^2 + (x_2y_1)^2 \\
\Updownarrow \\
2x_1x_2y_1y_2 + x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 \leqslant (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) \\
\Updownarrow \\
(x_1x_2 + y_1y_2)^2 \leqslant (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) \\
\Updownarrow \\
\text{(odmocnina - vše je kladné)} \\
|x_1x_2 + y_1y_2| \leqslant \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)}
\end{gathered} \tag{1.4}$$

(samozřejmě idea této nerovnosti je založena na opačném postupu)
$\triangle$-nerovnost vlastně znamená

$$\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2} \leqslant \sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}$$

Jelikož je všechno kladné, je toto ekvivalentní s

$$(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2 \leqslant x_1^2+y_1^2+2\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}+x_2^2+y_2^2$$

neboli

$$2x_1x_2+2y_1y_2 \leqslant 2\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}$$
$$x_1x_2+y_1y_2 \leqslant \sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}$$

která ale jistě platí díky předchozí nerovnosti (1.4).

(1.2) Ukažme, že platí aj $(*)$ tj. nerovnost $\big||z_1|-|z_2|\big| \leqslant |z_1|+|z_2|$

$$|z_2| = |z_1+(z_2-z_1)| \overset{\triangle\text{-nerovnost}}{\leqslant} |z_1|+|z_2-z_1| \Rightarrow |z_1|-|z_2| \geqslant -|z_2-z_1| = -|z_1-z_2|$$

Současně platí

$$|z_1| = |(z_1-z_2)+z_2| \overset{\triangle\text{-nerovnost}}{\leqslant} |z_1-z_2|+|z_2| \Rightarrow |z_1|-|z_2| \leqslant |z_1-z_2|$$

Zkombinováním těchto dvou nerovností dostáváme

$$-|z_1-z_2| \leqslant |z_1|-|z_2| \leqslant |z_1-z_2|, \quad \text{což jsou nerovnosti v } \mathbb{R}$$
$$\Downarrow \text{ definice abs. hodnoty v } \mathbb{R}$$
$$\big||z_1|-|z_2|\big| \leqslant |z_1-z_2|$$

Jelikož $z_2 \in \mathbb{C}$ je libovolné a $|-z_2| = |z_2|$, dostáváme pro $z_2 \rightsquigarrow -z_2$ požadovanou nerovnost

$$\big||z_1|-|z_2|\big| \leqslant |z_1|+|z_2|$$

(1.3) Na závěr ukažme, že platí Cauchyho-Schwarzova nerovnost

$$\Big|\sum_{j=1}^n z_j\cdot w_j\Big|^2 \leqslant \sum_{j=1}^n |z_j|^2\cdot\sum_{j=1}^n |w_j|^2$$

Pro libovolné $\alpha \in \mathbb{C}$ platí

$$0 \leqslant \sum_{j=1}^n |z_j-\alpha w_j|^2 = \sum_{j=1}^n (z_j-\alpha w_j)(\overline{z_j}-\overline{\alpha w_j})$$
$$= \sum_{j=1}^n (z_j\overline{z_j}+|\alpha|^2 w_j\overline{w_j}-\overline{\alpha}z_j\overline{w_j}-\alpha w_j\overline{z_j})$$
$$= \begin{pmatrix}1 & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^n |z_j|^2 & -\sum_{j=1}^n \overline{z_j}w_j \\ -\sum_{j=1}^n \overline{w_j}z_j & \sum_{j=1}^n |w_j|^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \alpha\end{pmatrix} = v^*Av$$

Odtud plyne, že pro libovolné $v = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{C}^2$ s $v_1 \neq 0$ je

$$v^* A v \geqslant 0 \tag{1.5}$$

(neboť $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{v_2}{v_1} \end{pmatrix}$,tj. předchozí případ s $\alpha = \frac{v_2}{v_1}$, přičemž násobíme zleva $\overline{v_1}$ a zprava v_1, tj. $|v_1|^2$). Je-li $v_1 = 0$, pak také platí (1.5), neboť v takovém případě máme

$$v^* A v = |v_2|^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} |w_j|^2 \geqslant 0$$

To znamená, že matice A je pozitivně semidefinitní. Tato skutečnost je ekvivalentní s nezáporností prvků na diagonále (triviálně pravdivé) a determinantu celé matice, tj.

$$0 \leqslant \det A = \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 \sum_{j=1}^{n} |w_j|^2 - \sum_{j=1}^{n} \overline{z_j} w_j \sum_{j=1}^{n} \overline{w_j} z_j$$

neboli

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} \overline{z_j} w_j \cdot \overline{\sum_{j=1}^{n} \overline{z_j} w_j}}_{\left| \sum_{j=1}^{n} \overline{z_j} w_j \right|^2} \leqslant \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 \sum_{j=1}^{n} |w_j|^2$$

což pro $\widetilde{z_j} := \overline{z_j}$ dává požadovanou nerovnost

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \widetilde{z_j} \cdot w_j \right|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n} |\widetilde{z_j}|^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} |w_j|^2$$

a důkaz je hotov. ∎

Dále také jistě

$$|\operatorname{Re} z| \leqslant |z| \quad \text{a} \quad |\operatorname{Im} z| \leqslant |z|$$

Komplexní čísla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ lze také vyjádřit v tzv. goniometrickém (polárním, kanonickém) tvaru, tj.

$$z = |z| \cdot (\cos \varphi + \mathrm{i} \cdot \sin \varphi),$$

kde φ je takové číslo, pro které platí

$$\cos \varphi = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \quad \& \quad \sin \varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}$$

(takové číslo jistě existuje, neboť $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = \left(\frac{\operatorname{Re} z}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{Im} z}{|z|}\right)^2 = 1$)

Číslo φ se nazývá argument komplexního čísla z. Ovšem φ není určeno jednoznačně, neboť $\varphi + 2k\pi$ je pro libovolné $k \in \mathbb{Z}$ také argumentem čísla z. Symbolem $\operatorname{Arg} z$ budeme značit množinu všech

argumentů čísla z (chápáno jako funkce proměnné z to je tzv. mnohoznačná funkce, tj. zobrazení $f : \mathbb{C} \to 2^{\mathbb{R}}$). Naproti tomu symbol $\arg z$ bude značit tzv. základní hlavní argument, pro který platí $\arg z \in [-\pi, \pi)$. Někdy (zejména v souladu s terminologii, kterou zavedeme později) se hovoří také o hlavní větvi $\arg z$ mnohoznačné funkce $\operatorname{Arg} z$. (Někdy se to zavádí i naopak!)
Místo intervalu $[-\pi, \pi)$ můžeme uvažovat libovolný polootevřený interval délky 2π, zejména např. $(-\pi, \pi]$ nebo $[0, 2\pi)$ atd.

Pak pro $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ platí

$$\arg z = \arg(x + iy) = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & x > 0 \\ \arctan \dfrac{y}{x} + \pi, & x < 0 \ \&\ y > 0 \\ \arctan \dfrac{y}{x} - \pi, & x < 0 \ \&\ y \leqslant 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0 \ \&\ y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 0 \ \&\ y < 0 \end{cases}$$

Množina $\mathbb{C}$ je lineární prostor nad $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}$. V prvním případě se jedná o jednoznačný prostor (komplexní vektorový prostor) a v druhém případě o dvourozměrný prostor. Chápeme-li $\mathbb{C}$ jako $\mathbb{R}$-lineární prostor, lze v něm zavést skalární součin prvků ("vektorů") z_1,z_2 jako

$$\langle z_1, z_2 \rangle := \operatorname{Re}(\overline{z_1} z_2) \overset{(*)}{=} \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) \overset{(**)}{=} \operatorname{Re} z_1 \operatorname{Re} z_2 + \operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2$$

$(*)$ … $\operatorname{Re}(\overline{z_1} z_2) = \overline{\operatorname{Re}(\overline{z_1} z_2)} = \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2})$
$(**)$ … $\overline{z_1} z_2 = (x_1 - iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + i x_1 y_2 - i x_2 y_1 + y_1 y_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + i(x_1 y_2 - x_2 y_1)$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(\overline{z_1} z_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 = \operatorname{Re} z_1 \operatorname{Re} z_2 + \operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2 \qquad \blacktriangle$$

Chápeme-li $\mathbb{C}$ jako $\mathbb{C}$-lineární prostor, pak máme skalární součin

$$\langle z_1, z_2 \rangle := z_1 \overline{z_2}.$$

Pro φ také zavedeme symbol (tj. zatím pouze formální přiřazení)

$$e^{i\varphi} := \cos\varphi + i \sin\varphi$$

takže můžeme psát

$$z = |z|\, e^{i\varphi}$$

pro libovolné $\varphi \in \operatorname{Arg} z$. Jestliže $z_1 = |z_1|\, e^{i\varphi_1} \neq 0$ & $z_2 = |z_2|\, e^{i\varphi_2} \neq 0$ (je-li $z_1 = 0$ nebo $z_2 = 0$, je následující rovnost triviální) pro libovolná $\varphi_1 \in \operatorname{Arg} z_1$ a $\varphi_2 \in \operatorname{Arg} z_2$, pak pro součin komplexních čísel $z_1 z_2$ dostaneme

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1|\, e^{i\varphi_1}\, |z_2|\, e^{i\varphi_2} = |z_1| \cdot |z_2|\, (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2) \\ &= |z_1| \cdot |z_2|\, [(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2)] \\ &= |z_1| \cdot |z_2|\, [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \\ &= |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \qquad (*) \end{aligned}$$

S využitím matematické indukce pak můžeme dokázat, že pro libovolné $n \in \mathbb{Z}$ platí tzv. Moivreova věta

$$z^n = |z|^n \left[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right] = |z|^n e^{in\varphi} \qquad (**)$$

S použitím goniometrického tvaru a rovnosti $(*)$ můžeme také geometricky znázornit (zkonstruovat) násobení & dělení (za pomoci $(***)$) komplexních čísel.

$n > 0 \ldots$ indukce
$n = 0 \ldots$ zřejmé
$n < 0 \ldots$ Nechť $n = -m$ pro $m \in \mathbb{N}$, pak

$$\begin{aligned} z^n = \frac{1}{z^m} &= \frac{1}{|z|^m \left[\cos(m\varphi) + i\sin(m\varphi)\right]} \\ &= |z|^{-m} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos(m\varphi) + i\sin(m\varphi)} \cdot \frac{\cos(m\varphi) - i\sin(m\varphi)}{\cos(m\varphi) - i\sin(m\varphi)}}_{\cos^2(m\varphi)+\sin^2(m\varphi)-i\cos(m\varphi)\sin(m\varphi)+i\sin(m\varphi)\cos(m\varphi)} \\ &= |z|^{-m} \cdot \left[\cos(m\varphi) - i\sin(m\varphi)\right] \\ &= |z|^{-m} \cdot \left[\cos(-m\varphi) + i\sin(-m\varphi)\right] \\ &= |z|^{-m} e^{-im\varphi} = |z|^n e^{in\varphi}. \end{aligned}$$

Na rovnost $(**)$ se můžeme podívat i z jiného úhlu pohledu. Platí

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi,$$

takže s využitím Binomické věty na levé straně dostaneme vyjádření $\cos n\varphi$ a $\sin n\varphi$ jakožto polynomů v proměnných $\sin\varphi$ a $\cos\varphi$, např.

$$\begin{aligned} \cos 3\varphi &= \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi \\ \sin 3\varphi &= 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi \end{aligned}$$

A právě toto můžeme brát jako takovou prvotní ilustraci onoho výroku od Painlevéa/Hadamarda o nejkratší cestě.

Geometrický náčrt násobení a dělení

Jelikož kromě $(*)$ a $(**)$ platí pro $z_1 = |z_1| e^{i\varphi_1} \neq 0$ a $z_2 = |z_2| e^{i\varphi_2} \neq 0$ (pro $z_1 = 0$ je následující rovnost triviální, pro $z_2 = 0$ nemá smysl) s libovolnými $\varphi_1 \in \operatorname{Arg} z_1$ a $\varphi_2 \in \operatorname{Arg} z_2$ také

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \qquad (***)$$

&

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}} \quad \text{pro} \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

kde $\sqrt[n]{|z|}$ je chápáno jako funkce reálné proměnné, dostáváme pro přípustná komplexní čísla (zejména $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$) a pro $n \in \mathbb{N}$ následující identity (což mnohdy může být užitečné míti na paměti).

i) Absolutní hodnota (přídavek k vlastnostem (1.1) - (1.3)):

$$|z^n| = |z|^n \quad \& \quad \left|\sqrt[n]{z}\right| = \sqrt[n]{|z|} \to \text{(funkce v } \mathbb{R}).$$

ii) Argument:

a) Množinově ($A \pm B = \{c, \exists a \in A \ \& \ b \in B : c = a \pm b\}$)

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$$
$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$$

Pozor!
NEPLATÍ:

$$\operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} z = 2\operatorname{Arg} z$$
$$\operatorname{Arg} z - \operatorname{Arg} z = 0, \quad \text{příp.} \quad \{0\}$$

OVŠEM SPRÁVNĚ MÁME:

$$\operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg} z^2 = \{2\varphi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$
$$\operatorname{Arg} z - \operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg} 1 = \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\operatorname{Arg} \bar{z} \overset{(*)}{=} \operatorname{Arg} \frac{1}{z} = -\operatorname{Arg} z$$
$$\operatorname{Arg} z^n = \underbrace{\operatorname{Arg} z + \cdots + \operatorname{Arg} z}_{n\text{-krát}} = \{n\varphi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$(*) \rightsquigarrow \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

b) Číselně

$$\arg(z_1 z_2) \equiv \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}$$
$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg z_1 - \arg z_2 \pmod{2\pi}$$

Kongruence (tj. mod2π) se vyskytuje proto, že jinak se mohu dostat mimo $[-\pi, \pi)$ obecně bude výsledek v $[-2\pi, 2\pi)$.
Bez kongruence platí přímo

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2\pi \cdot N_+$$
$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 + 2\pi \cdot N_-$$
$$\text{pro} \quad N_\pm := \begin{cases} -1 & \arg z_1 \pm \arg z_2 \geqslant \pi \\ 0 & -\pi \leqslant \arg z_1 \pm \arg z_2 < \pi \\ 1 & \arg z_1 \pm \arg z_2 < -\pi \end{cases}$$

Chceme-li $\arg z$ vyjádřit pomocí $\operatorname{Arg} z$, potom platí

$$\arg z = \operatorname{Arg} z + 2\pi \left\lceil -\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{Arg} z}{2\pi} \right\rceil$$

pro větev $\arg z \in [-\pi, \pi)$
kde $\lceil\cdot\rceil$ značí horní celou část, tj.$\lceil x\rceil \in \mathbb{Z}$ takové, že $x \leqslant \lceil x\rceil < x+1$

$$\arg \overline{z} = \arg \frac{1}{z} = -\arg z \quad \text{pro} \quad \arg z \in (-\pi, \pi)$$

je-li $\arg z = -\pi$ (tj. $\operatorname{Im} z = 0$ & $\operatorname{Re} z < 0$) potom $\arg \overline{z} = \arg \frac{1}{z} = \arg z = -\pi$
totéž by platilo pro $\arg z = 0$, jenže to v předchozí rovnosti nedělá problémy.

$$\arg z^n = n \cdot \arg z \pmod{2\pi}$$
$$\text{resp. bez kongruence} \ldots \arg z^n = n \cdot \arg z + 2\pi N_n, \quad \text{kde}$$
$$N_n := \left\lceil -\frac{1}{2} - \frac{n}{2\pi} \arg z \right\rceil$$

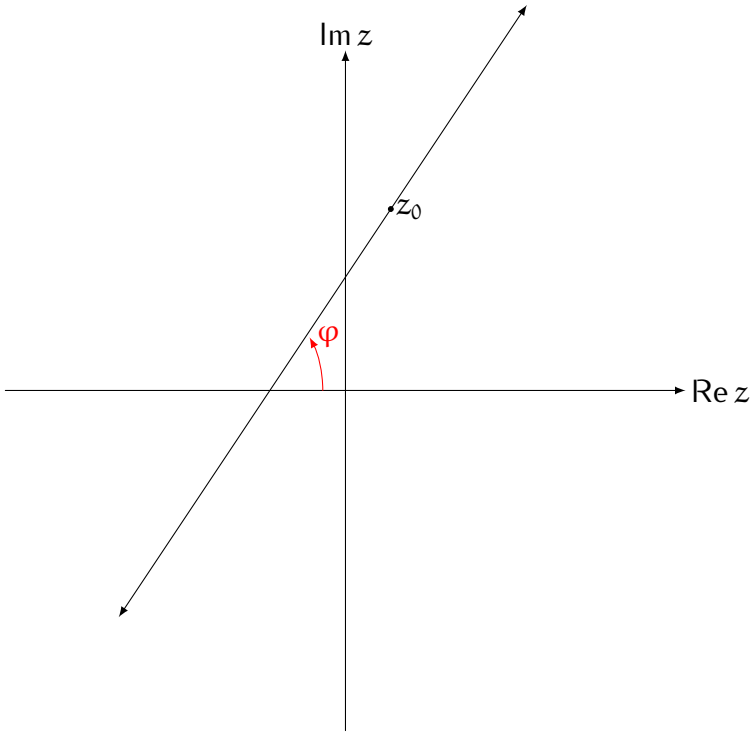
iii) "Exponenciála" pro $t, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

$$\left|e^{it}\right| = 1$$
$$\arg e^{it} \equiv t \pmod{2\pi}$$
$$\operatorname{Arg} e^{it} = \{t + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$
$$e^{i(t_1+t_2)} = e^{it_1} \cdot e^{it_2}$$
$$e^{i(t_1-t_2)} = \frac{e^{it_1}}{e^{it_2}}$$
$$e^{-it} = \frac{1}{e^{it}} = \overline{e^{it}}$$
$$\left(e^{it}\right)^m = e^{imt},\ m \in \mathbb{Z}$$

Nyní si popíšeme některé základní geometrické objekty v $\mathbb{C}$.

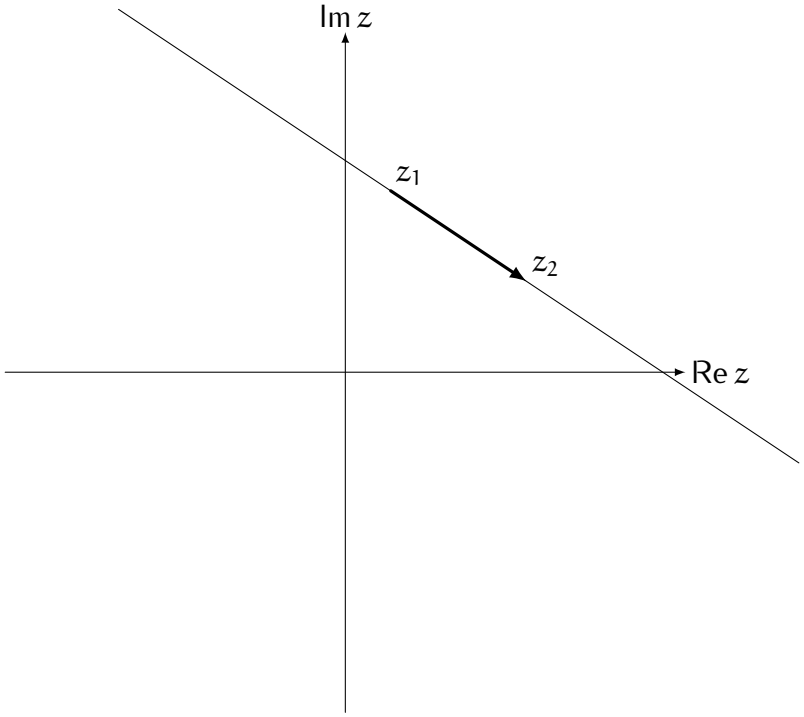
i) Přímka procházející bodem $z_0 \in \mathbb{C}$ a mající směr $e^{i\varphi}$, tj. přímku procházející z_0 a svírající s kladnou poloosou $\operatorname{Re} z$ úhel φ, můžeme vyjádřit parametricky jako

$$z = z_0 + te^{i\varphi}, \quad t \in \mathbb{R} \text{ je parametr}$$



ii) Přímku danou dvěma body $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ můžeme parametrizovat

$$z = z_1 + (z_2 - z_1)t, \quad t \in \mathbb{R} \text{ je parametr.}$$



iii) Úsečku s krajními body $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ lze vyjádřit jako

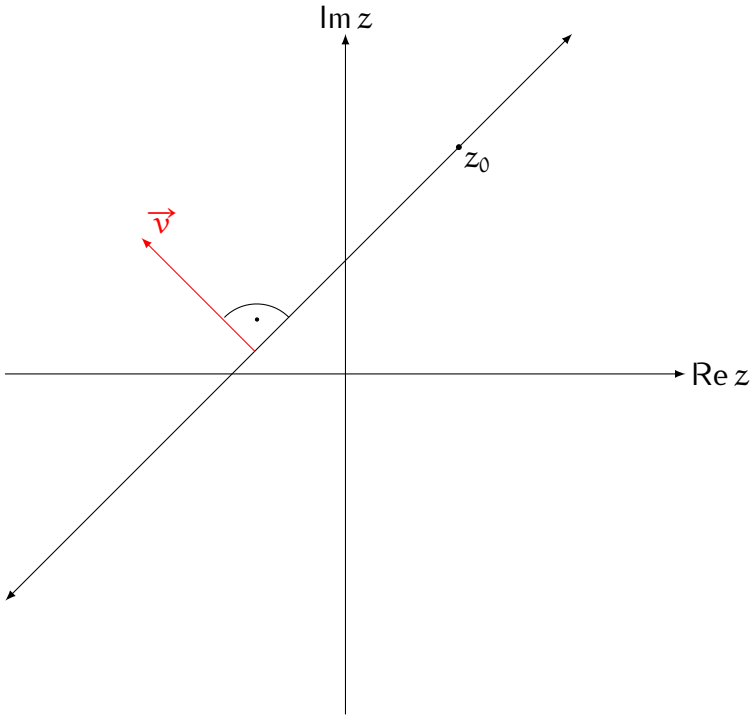
$$z = z_1 + (z_2 - z_1)t, \quad t \in [0, 1]\,.$$

iv) Přímka procházející bodem $z_0 \in \mathbb{C}$ a kolmou k vektoru $v \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, tj. přímku s normálovým vektorem v, můžeme zapsat jako

$$\operatorname{Re}\left[\overline{v}\,(z - z_0)\right] = 0$$

(Z definice skalárního součinu.)
Nebo lépe

$$\overline{v}z + v\overline{z} + \alpha = 0\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$
$$\downarrow$$
$$\alpha = -\overline{v}z_0 - v\overline{z_0} = -2\operatorname{Re}\left(\overline{v}z_0\right)$$
$$\text{Z rovnosti } \operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}$$
$$\downarrow$$
$$\frac{\overline{v}\,(z - z_0) + v\,(\overline{z} - z_0)}{2} = 0$$



v) Kružnici se středem v $z_0 \in \mathbb{C}$ a poloměrem $r > 0$ lze popsat rovnicí

$$z = z_0 + re^{it}\,, \quad t \in [0, 2\pi]$$

nebo

$$|z - z_0| = r.$$

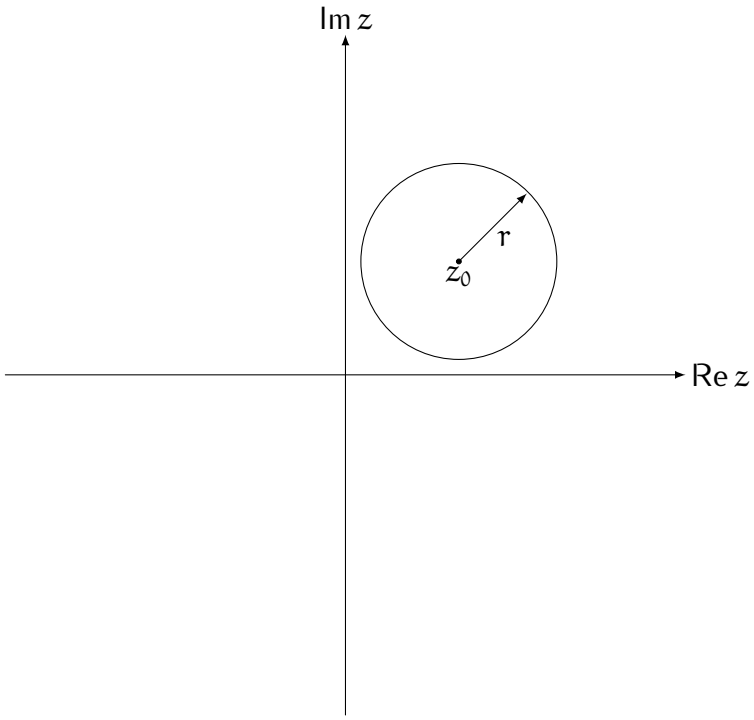
Poslední rovnice je ekvivalentní s $(z - z_0)\,(\overline{z} - \overline{z_0}) = r^2$, tj.

$$\underbrace{z\overline{z}}_{|z|^2} - \overline{z_0}z - z_0\overline{z} + \underbrace{z_0\overline{z_0}}_{|z_0|^2} - r^2 = 0$$

Tedy každou kružnici lze zapsat jako

$$z\bar{z} + \overline{B}z + B\bar{z} + \gamma = 0\,, \quad \text{kde } B \in \mathbb{C}, \gamma \in \mathbb{R} \;\&\; |B|^2 > \gamma$$

(táto kružnice má střed v -B a poloměr $r = \sqrt{|B|^2 - \gamma}$, tj. pro $|B|^2 = \gamma$ máme jen bod B).



vi) Zobecněnou kružnicí rozumíme množinu bodů vyhovujících rovnici

$$\alpha z\bar{z} + \overline{B}z + B\bar{z} + \gamma = 0\,, \quad \text{kde } B \in \mathbb{C},\ \alpha, \gamma \in \mathbb{R},\ |B|^2 - \alpha\gamma > 0$$

Je-li $\alpha = 0 \Rightarrow B \neq 0$ a máme přímku s normálovým vektorem určeným B.
Je-li $\alpha \neq 0$, pak můžeme psát

$$z\bar{z} + \frac{\overline{B}}{\alpha}z + \frac{B}{\alpha}\bar{z} + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$$

což je kružnice se středem v $z_0 = -\frac{B}{\alpha}$ a s poloměrem

$$r = \sqrt{\frac{|B|^2}{\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha}} = \frac{1}{|\alpha|}\sqrt{|B|^2 - \alpha\gamma} > 0$$

Zobecněnou kružnicí tedy rozumíme přímku (kterou lze chápat jako limitní polohu kružnice) nebo kružnici.

Mnohdy je (a bude) možné rozšířit množinu $\mathbb{C}$ o jeden nevlastní bod ∞ (záměrně bez znaménka) podobně jako $\mathbb{R}$ rozšiřujeme o $\pm\infty$. (Zatímco $\mathbb{R}^n$ také "obvykle" rozšiřujeme o ∞, nebo ne?)

Definujeme

$$z + \infty := \infty, \quad z \in \mathbb{C}$$
$$z \cdot \infty := \infty, \quad z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \ \rightarrow \text{pozor } (-1)\cdot\infty = -(\infty) = \infty$$
$$\infty \cdot \infty := \infty$$
$$\frac{z}{\infty} := 0, \quad z \in \mathbb{C}$$
$$\frac{z}{0} := \infty, \quad z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \quad \& \quad \frac{\infty}{0} := \infty$$
$$\frac{\infty}{z} := \infty, \quad z \in \mathbb{C}$$
$$\infty^n = 0^{-n} := \infty, \quad n \in \mathbb{N}$$
$$\infty^{-n} = 0^n := 0, \quad n \in \mathbb{N} 0^0 = \infty^0 := 1$$

Současně nedefinujeme výrazy: $\infty \pm \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$ a $\frac{\infty}{\infty}$. Skutečně ani $\oplus$, neboť teď se z ∞ stal "hermafrodit".

Je ∞ reálné nebo komplexní číslo? Je užitečné z něj udělat reálné číslo, tj.

$$\operatorname{Re}\infty = \infty, \quad \operatorname{Im}\infty = 0, \quad |\infty| = \infty \quad \text{a} \quad \overline{\infty} = \infty$$

a $x < \infty$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$. Pozor, toto je jiné nekonečno než to, na které jsme zvyklí z MAI, tj. v $\mathbb{R}^*$ - je holt potřeba rozlišovat kontext (my jsme nevnořili $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$ nebo $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$!!)

Množinu $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ se zavedenými algebraickými operacemi značíme $\widetilde{\mathbb{C}}$ (někdy se užívá také $\mathbb{S}$, $\overline{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}_\infty$) a nazýváme ji rozšířenou množinou komplexních čísel (též rozšířenou (uzavřenou) Gaussovou rovinou).

Metriku v $\widetilde{\mathbb{C}}$ lze zkonstruovat pomocí tzv. stereografické projekce. Uvažme kulovou plochu v $\mathbb{R}^3$ danou rovnicí

$$S^2 : \xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

která se nazývá Riemannovou sférou (kulovou plochou s poloměrem $\frac{1}{2}$ se středem $\left[0, 0, \frac{1}{2}\right]$). Každý bod $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ztotožníme s bodem $[x, y, 0] \in \mathbb{R}^3$. Nyní uvažme přímku procházející bodem z a "severním pólem" $[0, 0, 1]$ Riemannovy sféry. Označme jako $f(z) = [\xi, \eta, \zeta]$ průsečík této přímky se sférou S^2. Ten je jistě různý od $[0, 0, 1]$. Zobrazení

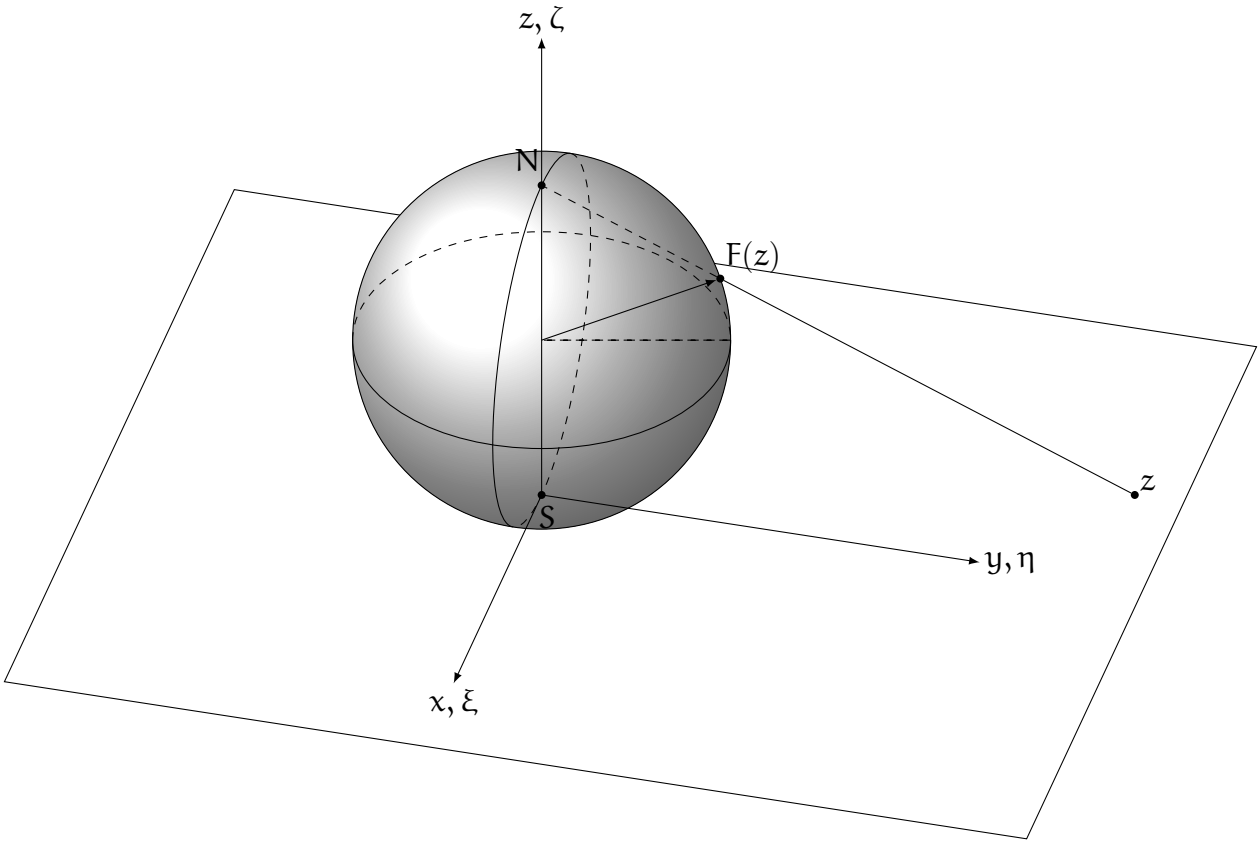
$$z \rightarrow [\xi, \eta, \zeta]$$

se nazývá stereografickou projekcí. Protože rovnici S^2 lze také zapsat jako $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = 0$ a přímku procházející body $[0, 0, 1]$ a $[x, y, 0]$ lze parametrizovat jako

$$\xi = xt$$
$$\eta = yt$$
$$\zeta = 1 - t\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

dostaneme dosazením do rovnice sféry

$$x^2t^2 + y^2t^2 + (1-t)^2 - (1-t) = 0.$$



Odtud plyne

$$\left(x^2+y^2\right)t^2+t^2-2t+1-1+t=0,$$

neboli

$$t\left[\left(x^2+y^2+1\right)t-1\right]=0.$$

Poslední rovnice má dva kořeny:

$$t_1=0 \quad \text{odpovídá severnímu pólu } [0,0,1]$$

$$,t_2=\frac{1}{1+x^2+y^2} \quad \text{odpovídá bodu } \left[\frac{x}{1+x^2+y^2},\frac{y}{1+x^2+y^2},1-\frac{1}{1+x^2+y^2}\right],$$

kde $1-\frac{1}{1+x^2+y^2}=\frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}$.
(Dosazením do parametrického vyjádření přímky.)
Tedy souřadnice bodu $F(z)$ jsou:

$$\xi=\frac{\operatorname{Re} z}{1+|z|^2},\quad \eta=\frac{\operatorname{Im} z}{1+|z|^2},\quad \zeta=\frac{|z|^2}{1+|z|^2}.$$

Naopak ze vztahu $\zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}$ plyne

$$\begin{aligned} |z|^2 &= \left(1 + |z|^2\right)\zeta \Leftrightarrow \\ (1-\zeta)\,|z|^2 &= \zeta \Leftrightarrow \\ |z|^2 &= \frac{\zeta}{1-\zeta} \Leftrightarrow \\ 1 + |z|^2 &= \frac{1}{1-\zeta}. \end{aligned}$$

Protože současně $z = (\xi + i\eta)\left(1 + |z|^2\right)$ platí

$$z = \frac{\xi + i\eta}{1-\zeta}.$$

Stereografická projekce F je tudíž spojité bijektivní zobrazení množiny $\mathbb{C}$ na $S^2 \setminus \{[0,0,1]\}$. Jelikož inverzní zobrazení je také spojité, je F homeomorfismus (bijekce+spojitost+spojitost inverze). Zobrazení F můžeme snadno rozšířit na $\widetilde{\mathbb{C}}$ volbou $F(\infty) := [0,0,1]$.

Díky stereografické projekci lze na $\widetilde{\mathbb{C}}$ definovat metriku (tzv. "chordal metric", chord∼tětiva) vztahem

$$\rho(z_1, z_2) := \rho_3\left(F(z_1), F(z_2)\right),$$

kde ρ_3 je euklidovská metrika v $\mathbb{R}^3$ a F je stereografická projekce rozšířená na $\widetilde{\mathbb{C}}$ (Pozor! vzdálenost tedy měříme klasicky mezi obrazy na kouli, nikoli pomocí oblouku!). Prostor $\left(\widetilde{\mathbb{C}}, \rho\right)$ je pak metrický prostor izometrický ($\rho_2(f(x), f(y)) = \rho_1(x,y) \rightarrow$ zachovává vzdálenosti) s metrickým prostorem $\left(S^2, \rho_3\right)$. Prostor $\left(\widetilde{\mathbb{C}}, \rho\right)$ je opět úplný.

Na druhou stranu prostor $(\mathbb{C}, \rho)$ není úplný, např. cauchyovská postupnost $\{n\}$ není v $(\mathbb{C}, \rho)$ konvergentní ($\leftarrow$ toto se definuje v další kapitole - ale intuitivně: obrazy $\{n\}$ se blíží k severnímu pólu $\Rightarrow$ je to cauchyovské, ale pro $\mathbb{C}$ nemáme severní pól=limitní bod).

Metrický prostor $(\mathbb{C}, d)$ je homeomorfní s $(\mathbb{C}, \rho)$ a metriky $d(z_1, z_2)$ (abs. hodnota) a $\rho(z_1, z_2)$ jsou v $\mathbb{C}$ ekvivalentní (tj. zachovávají konvergenci/otevřenou množinu).

V následujícím lemmatu dáváme explicitní vyjádření metriky ρ, z čehož se také můžeme snadno přesvědčit, že se skutečně jedná o metriku. (Pro $(\mathbb{C}, \rho)$ to plyne z definice neboť ρ^3 je metrika.)

Lemma 1.1

Platí

$$\rho(z_1, z_2) = \begin{cases} \dfrac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\cdot\sqrt{1+|z_2|^2}}, & z_1, z_2 \in \mathbb{C} \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}}, & z_1 \in \mathbb{C} \ \&\ z_2 = \infty \\ 0, & z_1 = \infty = z_2 \end{cases}$$

Důkaz. Je-li $z_1 = \infty = z_2$ je tvrzení zřejmé. Zbývají tedy 2 možnosti.

1) Nechť $z_1 \neq \infty$ a $z_2 \neq \infty$. Potom

$$\begin{aligned}
\rho^2(z_1,z_2) &= \rho_3^2(F(z_1),F(z_2)) \\
&= \left(\frac{\operatorname{Re} z_1}{1+|z_1|^2} - \frac{\operatorname{Re} z_2}{1+|z_2|^2}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{Im} z_1}{1+|z_1|^2} - \frac{\operatorname{Im} z_2}{1+|z_2|^2}\right)^2 \\
&+ \left(\frac{|z_1|^2}{1+|z_1|^2} - \frac{|z_2|^2}{1+|z_2|^2}\right)^2 \\
&= \left(\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{1+|z_1|^2} - \frac{z_2}{1+|z_2|^2}\right)\right)^2 + \left(\operatorname{Im}\left(\frac{z_1}{1+|z_1|^2} - \frac{z_2}{1+|z_2|^2}\right)\right)^2 \\
&+ \left(\frac{|z_1|^2}{1+|z_1|^2} - \frac{|z_2|^2}{1+|z_2|^2}\right)^2 \qquad \left[|z|^2 = x^2+y^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2\right] \\
&= \left|\frac{z_1}{1+|z_1|^2} - \frac{z_2}{1+|z_2|^2}\right|^2 + \left(\frac{|z_1|^2}{1+|z_1|^2} - \frac{|z_2|^2}{1+|z_2|^2}\right)^2 \\
&\left[|z_1-z_2|^2 = (\operatorname{Re}(z_1-z_2))^2 + (\operatorname{Im}(z_1-z_2))^2 = \operatorname{Re}^2 z_1 + \operatorname{Re}^2 z_2 + \operatorname{Im}^2 z_1 + \operatorname{Im}^2 z_2 - 2\operatorname{Re} z_1 \cdot \operatorname{Re} z_2 - 2\operatorname{Im} z_1 \cdot \operatorname{Im} z_2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\operatorname{Re}(\overline{z_1} z_2)\right] \\
&= \frac{|z_1|^2}{\left(1+|z_1|^2\right)^2} + \frac{|z_2|^2}{\left(1+|z_2|^2\right)^2} \\
&= \frac{|z_1|^2}{\left(1+|z_1|^2\right)^2} + \frac{|z_2|^2}{\left(1+|z_2|^2\right)^2} - \frac{2\operatorname{Re}(\overline{z_1} z_2)}{\left(1+|z_1|^2\right)\left(1+|z_2|^2\right)} \\
&+ \frac{|z_1|^4}{\left(1+|z_1|^2\right)^2} - \frac{2|z_1|^2 \cdot |z_2|^2}{\left(1+|z_1|^2\right)\left(1+|z_2|^2\right)} + \frac{|z_2|^4}{\left(1+|z_2|^2\right)} \qquad \left[\frac{|z|^2\cancel{\left(1+|z|^2\right)}}{\left(1+|z|^2\right)\cancel{^2}}\right] \\
&= \frac{|z_1|^2}{1+|z_1|^2} + \frac{|z_2|^2}{1+|z_2|^2} - \frac{2\left(\operatorname{Re}(\overline{z_1} z_2) + |z_1|^2 |z_2|^2\right)}{\left(1+|z_1|^2\right)\left(1+|z_2|^2\right)} \\
&= \frac{|z_1|^2\left(1+|z_2|^2\right) + |z_2|^2\left(1+|z_1|^2\right) - 2\operatorname{Re}(\overline{z_1} z_2) + 2|z_1|^2|z_2|^2}{\left(1+|z_1|^2\right)\left(1+|z_2|^2\right)} \\
&= \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2 - \operatorname{Re}(\overline{z_1} z_2)}{\left(1+|z_1|^2\right)\left(1+|z_2|^2\right)} \\
&= \frac{|z_1-z_2|^2}{\left(1+|z_1|^2\right)\left(1+|z_2|^2\right)},
\end{aligned}$$

Z čehož plyne požadovaná rovnost.

2) Nechť $z_1 \neq \infty$ a $z_2 = \infty$. Potom

$$\begin{aligned}\rho^2(z_1,\infty) &= \rho_3^2\left(F(z_1),(0,0,1)^T\right)\\ &= \left(\frac{\operatorname{Re} z_1}{1+|z_1|^2}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{Im} z_1}{1+|z_1|^2}\right)^2 + \left(\frac{|z_1|^2}{1+|z_1|^2}-1\right)^2 \qquad \frac{|z_1|^2-1-|z_1|^2}{1+|z_1|}\\ &= \frac{\boxed{(\operatorname{Re} z_1)^2(\operatorname{Im} z_1)^2}^{\to |z_1|^2}}{\left(1+|z_1|^2\right)^2} + \frac{1}{\left(1+|z_1|^2\right)^2}\\ &= \frac{1+|z_1|^2}{\left(1+|z_1|^2\right)^2} = \frac{1}{1+|z_1|^2}\end{aligned}$$

čímž je důkaz kompletní. ∎

Poznámka: ρ je skutečně metrika

i) $\rho(z_1,z_2) \geqslant 0\surd$ & $\rho(z_1,z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2\surd$ … zřejmé

ii) $\rho(z_1,z_2) = \rho(z_2,z_1)\surd$ … zřejmé (definice pro $z_1 \in \mathbb{C}$ & $z_2 = \infty$ je již symetricky dána)

iii) $\rho(z_1,z_2) + \rho(z_2,z_3) \geqslant \rho(z_1,z_3)$

a) $z_1 = z_2 = z_3 = \infty\surd$

b) $z_1 = z_2$ & $z_3 \in \mathbb{C} \;\to\; 0 + \frac{1}{\sqrt{1+|z_3|^2}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{1+|z_3|^2}}\surd$

c) $z_1 \in \mathbb{C}$ & $z_2 = z_3 = \infty \;\to\; \frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}} + 0 \geqslant \frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}}\surd$

d) $z_1 = z_3 = \infty$ & $z_2 \in \mathbb{C} \;\to\; \frac{1}{\sqrt{1+|z_2|^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+|z_2|^2}} \geqslant 0\surd$

e) Nyní uvažme $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ (princip od Shizna Kakutaniho).
Nejdříve poznamenejme, že pro $a, b, c \in \mathbb{C}$ platí

$$(a-b)(1+\bar{c}c) = (a-c)(1+\bar{c}b) + (c-b)(1+\bar{c}a),$$

z čehož plyne

$$\begin{aligned}|a-b|\cdot\left|1+|c|^2\right| &\leqslant |a-c|\cdot|1+\bar{c}b| + |c-b|\cdot|1+\bar{c}a|\\ &\leqslant |a-c|\cdot\left(1+|c|^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(1+|b|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\quad + |c-b|\cdot\left(1+|c|^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(1+|a|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (*)\end{aligned}$$

kde jsme v posledním kroku využili důsledek Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti (pro $z_1 = w_1 = 1$ a $z_2 = \alpha, w_2 = \beta$)

$$|1 + \alpha\beta|^2 \leqslant \left(1 + |\alpha|^2\right) \cdot \left(1 + |\beta|^2\right).$$

Volbou $a = z_1, b = z_3$ a $c = z_2$ dostaneme z $(*)$ nerovnost

$$|z_1 - z_3| \cdot \left|1 + |z_2|^2\right| \leqslant |z_1 - z_2| \cdot \sqrt{1 + |z_2|^2} \cdot \sqrt{1 + |z_3|^2} + |z_2 - z_3| \cdot \sqrt{1 + |z_2|^2} \cdot \sqrt{1 + |z_1|^2},$$

což po vydělení obou stran kladným výrazem

$$\left|1 + |z_2|^2\right| \cdot \sqrt{1 + |z_3|^2} \cdot \sqrt{1 + |z_1|^2}$$

dává

$$\frac{|z_1 - z_3|}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \cdot \sqrt{1 + |z_3|^2}} \leqslant \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_2|^2} \cdot \sqrt{1 + |z_1|^2}} + \frac{|z_2 - z_3|}{\sqrt{1 + |z_2|^2} \cdot \sqrt{1 + |z_3|^2}} \qquad (**),$$

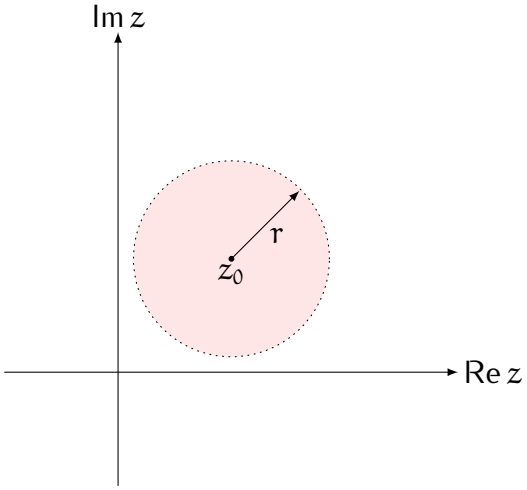
neboli

$$\rho(z_1, z_3) \leqslant \rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3).$$

2. Nekonečné řady v $\mathbb{C}$

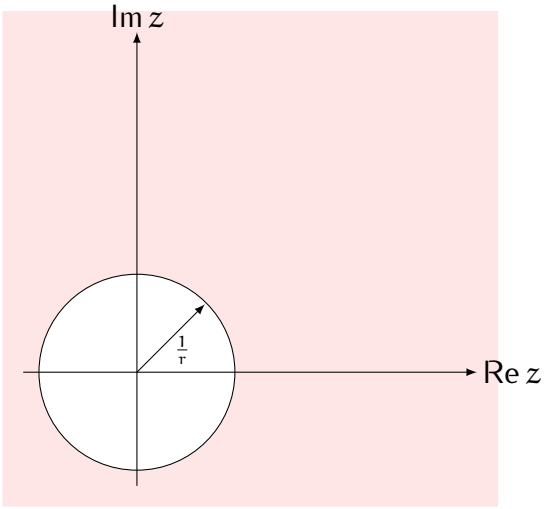
Máme-li metrický prostor, můžeme zavést v $\widetilde{\mathbb{C}}$ (nebo $\mathbb{C}$) řadu dalších topologických pojmů. Otevřeným kruhem $K(z_0, r)$ pro $z_0 \in \mathbb{C}$ a $0 < r \leqslant \infty$ rozumíme množinu

$$K(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| < r\}.$$



Pak ε-ovým okolím bodu $z_0 \in \mathbb{C}$ rozumíme $K(z_0, \varepsilon)$.
Je-li $z_0 = \infty$, pak

$$K(\infty, r) := \left\{z \in \widetilde{\mathbb{C}} : \ |z| > 1/r\right\} = \widetilde{\mathbb{C}} \setminus \overline{K(0, 1/r)},$$



a tedy ε-ovým okolím ∞ ($\varepsilon > 0$), rozumíme $K(\infty, \varepsilon)$.

Jestliže $z_1, z_2, \dots \in \mathbb{C}$, pak limitou posloupnosti komplexních čísel $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je bod $z^* \in \widetilde{\mathbb{C}}$, jestliže pro každé ε-okolí $K(z^*, \varepsilon)$ existuje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \{n_\varepsilon, n_\varepsilon + 1, n_\varepsilon + 2, \dots\}$ platí $z_n \in K(z^*, \varepsilon)$, což píšeme jako

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z^* \quad \text{nebo} \quad z_n \to z^* \text{ pro } n \to \infty.$$

Ekvivalentně:
$\exists z^*$ takové, že jeho libovolné okolí (tj. v libovolném $K(z^*, \varepsilon)$ leží skoro všechny členy $\{z_n\}$) obsahuje skoro všechna z_n (tj. vyjma konečného počtu).
V takovém případě řekneme, že $\{z_n\}$ konverguje k z^*.
Nekonverguje-li $\Rightarrow$ diverguje. V případě, že posloupnost $\{z_n\}$ konverguje k $z^* \in \mathbb{C}$, je definice limity ekvivalentní s tím, že posloupnost absolutních hodnot $\{|z_n - z^*|\}_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje k nule, tj

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - z^*| = 0.$$

Historická poznámka: Přesné kodifikování pojmu limity/konvergence činilo matematikům značné potíže až do druhé poloviny 19. století. Počátek takových úvah má kořeny v antické "exhaustační metodě" (vyčerpávání).
Leibniz, Euler, Newton a celá řada dalších pracovala s nekonečnými řadami, posloupnostmi a limitami spíše intuitivně a s pomocí pojmů "nekonečně (libovolně) malé", "nekonečně blízko" apod. Toto se objevuje ještě i v Cauchyho Cours d'Analyse z roku 1821. Např. Euler ještě neměl potíže psát (motivován rovností $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1-x)^{-1}$)

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2} \quad !?$$

Ony nepochybně vystihující a dostačující fráze byly poprvé precizovány Weierstrassem kolem roku 1860 v jeho berlínských přednáškách pomocí ε-δ terminologie. Díky této aritmetizaci analýzy započalo období přesnosti. Pro zajímavost dodejme, že Weierstrassovy myšlenky byly nejdříve známy pouze jeho studentům skrze přepisy a kopie Weierstrassových přednášek. Až jeho následovníci toto zveřejnili ve svých knihách - jedním z prvních byl Otto Scholz ve "Vorlesungen über Allgemeine Arithmetik. Nach dem neueren Ansichten" z roku 1885.

To vyplývá ze skutečnosti, že v takovém případě máme $z_n \in \mathbb{C}$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ a prostory $(\mathbb{C}, d)$ a $\left(\widetilde{\mathbb{C}}, \rho\right)$ jsou homeomorfní, takže $\rho(z_n, z^*) \to 0$ právě tehdy, když $d(z_n, z^*) \to 0$.
Odtud je dále vidět, že

$$z_n \to z^* \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_n) \to \operatorname{Re}(z^*) \ \ \& \ \ \operatorname{Im}(z_n) \to \operatorname{Im}(z^*)$$

Důkaz. "⇒"

$$\operatorname{Re} z_n = \frac{1}{2}(z_n + \overline{z_n})$$
$$\operatorname{Im} z_n = \frac{1}{2}(z_n - \overline{z_n})$$

"⇐"

$$\begin{gathered} \operatorname{Re} z_n \to a \\ \operatorname{Im} z_n \to b \\ \Downarrow \\ z_n \to a + ib \end{gathered}$$

■

a také

$$z_n \to z^* \Leftrightarrow \overline{z_n} \to \overline{z^*} \quad \text{a} \quad \{z_n\} \text{ je ohraničená posloupnost}$$

(Plyne z $|\overline{z_n} - \overline{z}| = |z_n - z|$).

Je-li $z^* = \infty$, pak tedy $\rho(z_n, z^*) \to 0$ neboli $\xi_n \to 0$ & $\eta_n \to 0$ & $\zeta_n \to 1$. Toto v případě, že $z_n = x_n + iy_n \in \mathbb{C}$ pro nekonečně mnoho indexů, znamená, že

$$\xi_n = \frac{x_n}{x_n^2 + y_n^2 + 1} \to 0, \quad \eta_n = \frac{y_n}{x_n^2 + y_n^2 + 1} \to 0, \quad \zeta_n = \frac{x_n^2 + y_n^2}{x_n^2 + y_n^2 + 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x_n^2 + y_n^2}} \to 1,$$

což je splněno právě tehdy, když $x_n^2 + y_n^2 \to \infty$, tj. $|z_n| \to \infty$, neboli

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty \ \Leftrightarrow \ \lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty \ \Leftrightarrow \ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|z_n|} = 0$$

(Pozor! V $\mathbb{R}$ platí pouze "⇒" opačná implikace v $\mathbb{R}$ neplatí $\rightsquigarrow$ oscilace $\{(-1)^n \cdot n\}$!)
V $\mathbb{R}$ platí ekvivalence pouze pro $z_n \to 0 \Leftrightarrow |z_n| \to 0$).
Tím jsme mimo jiné ukázali, že posloupnost $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ pro $z_n \in \widetilde{\mathbb{C}}$ splňuje

$$z_n \to \infty \Leftrightarrow F(z_n) \to [0, 0, 1].$$

Geometrický význam této charakterizace je takový, že se členy posloupnosti $\{z_n\}$ vzdalují od počátku - ať už po přímce, spirále nebo i jinak.
Vzhledem k úplnosti prostoru $\mathbb{C}$ platí: $z_n \to z^* \in \mathbb{C} \Leftrightarrow$ je splněna Cauchyho-Bolzanova podmínka (tj. posloupnost je cauchyovská), tj.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ takové, že } \forall m, n \geqslant n_\varepsilon \text{ platí } |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

(To plyne ihned z faktu, že posloupnost konverguje $\Leftrightarrow$ konverguje reálná a imaginární část & $\mathbb{R}$ je úplný.)

Důkaz. "⇒" Pro dané $\varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon : \ |z_n - z^*| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geqslant n_0$. Pak

$$|z_n - z_m| \leqslant |z_n - z^*| + |z_m - z^*| < \varepsilon \quad \forall m, n \geqslant n_0.$$

"⇐" Platí

$$|\mathrm{Re}\,(z_n) - \mathrm{Re}\,(z_m)| \leqslant |z_n - z_m|\,, |\mathrm{Im}\,(z_n) - \mathrm{Im}\,(z_m)| \leqslant |z_n - z_m|$$

pro libovolné $m, n \in \mathbb{N}$, z čehož plyne cauchyovskost posloupností $\{\mathrm{Re}(z_n)\}$ a $\{\mathrm{Im}(z_n)\}$. Tvrzení pak je důsledkem úplnosti $\mathbb{R}$, neboť $\mathrm{Re}\, z_n \to a$ & $\mathrm{Im}\, z_n \to b \ \Rightarrow \ z_n \to a + ib$. ∎

Rozšíříme-li pojem konvergence také na případ $z_n \to \infty$, pak také prostor $(\widetilde{\mathbb{C}}, \rho)$ je úplný.

Je-li $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ daná posloupnost čísel $z_n \in \mathbb{C}$ pro $n \in \mathbb{N}$, pak posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ se členy $s_n := \sum_{j=1}^{n} z_j$ nazýváme posloupnost <u>částečných součtů</u> a zároveň <u>řada se členy</u> z_n. <u>Nekonečnou řadu</u> se členy z_n rozumíme limitu $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ (tj. $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$). Pokud táto posloupnost konverguje v $(\mathbb{C}, d)$, nazveme nekonečnou řadu <u>konvergentní</u> a klademe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} s_n$. V opačném případě řekneme, že nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ <u>diverguje</u>.

Již víme, že výraz $\infty + \infty$ není definován. Proto je částečný součet s_n definován pro $\forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow z_n = \infty$ pro nejvýše jedno $n \in \mathbb{N}$. Navíc, je-li $z_{n_0} = \infty$ pro právě jeden index $n_0 \in \mathbb{N}$, pak $s_n = \infty$ pro $\forall n \geqslant n_0$, a tedy $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$, což je triviální případ, který můžeme z našich úvah vyloučit. Tedy pro každou řadu $\sum z_n$ budeme předpokládat, že $z_n \in \mathbb{C}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. $\rightsquigarrow$ (•)
Pro posloupnosti v $\widetilde{\mathbb{C}}$ dále platí

i) $\{z_n\} \to z$, $\{w_n\} \to w$, pak

$$\{z_n \dot{\pm} w_n\} \to z \dot{\pm} w, \quad \text{má-li pravá strana smysl}$$

ii) $\{z_n\} \to z$, $\{w_n\} \to w$

$$\left\{\frac{z_n}{w_n}\right\} \to \frac{z}{w}, \quad \text{má-li pravá i levá strana smysl}$$

iii) $\{z_n\} \to z \ \Rightarrow \ |z_n| \to |z|$,

iv) $\{z_n\} \to z$, pak také $\{z_{n_k}\} \to z$ pro libovolnou podposloupnost.

Důkaz. (iii) plyne z nerovnosti $||z_n| - |z|| \leqslant |z_n - z|$. ∎

Položíme-li $a\{z_n\} + b\{w_n\} := \{az_n + bw_n$ & $\{z_n\}\{w_n\} := \{z_n w_n\}$ pro libovolné $a, b \in \mathbb{C}$, pak (i) vlastně dává:

Množina všech konvergentních posloupností tvoří (komutativní) $\mathbb{C}$-algebru $\mathcal{A}$ (přesněji, $\mathbb{C}$-podalgebru $\mathbb{C}$-algebry všech posloupností) s nulovým prvkem $\{0\}$ a jednotkovým $\{1\}$. Zobrazení $\lim : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ $\{z_n\} \mapsto \lim z_n$ je homeomorfizmus $\mathbb{C}$-algebry.

Co je co? $\mathbb{C}$-algebra $\mathcal{A}$ je $\mathbb{C}$-vektorový prostor, pro jehož prvky máme násobení $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A} : (a, a') \to aa'$ splňující 2 distributivní zákony $(\lambda a + \mu b)a' = \lambda(aa') + \mu(ba')$ a $a'(\lambda a + \mu b) = \lambda(a'a) + \mu(a'b)$. Homomorfismus $\mathbb{C}$-vektorového prostoru $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ mezi $\mathbb{C}$-algebrami $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ se nazývá $\mathbb{C}$-algebrový homomorfizmus je-li multiplikativní, tj. $f(aa') = f(a) \cdot f(a')$ $\forall a, a' \in \mathcal{A}$.

($\bullet$) $\rightsquigarrow$ Potom v takovém případě platí (podobně jako u nekonečných řad v $\mathbb{R}$), že konvergence nebo divergence se nezmění, jestliže vynecháme nebo naopak přidáme či změníme konečný počet členů. Tedy je-li $\sum_{n=l}^{\infty} z_n$ konvergentní a $l \in \mathbb{Z}$, pak platí

$$\sum_{n=l}^{\infty} z_n = \sum_{n=l_0}^{\infty} z_{n+l-l_0}.$$

Proto budeme uvažovat především nekonečné řady s $l \in \{0, 1\}$.

Jelikož $z_n = s_n - s_{n-1}$, musí každá konvergentní řada splňovat (nutnou podmínku konvergence)

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0$$

Pravidla pro počítaní s limitami konvergentních posloupností dávají následující (více-méně) zřejmá tvrzení.

Věta 2.1

Jsou-li řady $\sum_{n=1}^{\infty} z_n, \sum_{n=1}^{\infty} w_n$ konvergentní a jsou-li $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ libovolné, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha z_n + \beta w_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} z_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} w_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{z_n} = \overline{\sum_{n=1}^{\infty} z_n}$$

Důsledek 2.2

Komplexní řada $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konverguje právě tehdy, kdy konvergují obě reálné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$. V takovém případě platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n + i \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$$

Důsledek 2.2 tedy dává velmi jednoduchý nástroj pro vyšetření konvergence $\sum z_n$: stačí uvážit reálné řady $\sum \operatorname{Re} z_n$ a $\sum \operatorname{Im} z_n$ a s využitím kritérií známých z $\mathbb{R}$ rozhodnout o jejich konvergenci. Zejména pro řady tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z_n$ máme k dispozici *Leibnizovo kritérium*, tj. pokud pro všechna $n \in \mathbb{N}$ (případně po vynechání konečného počtu členů) platí

$$0 < \operatorname{Re} z_{n+1} \leqslant \operatorname{Re} z_n \quad (\text{kladná } \& \text{ nerostoucí } \{\operatorname{Re} z_n\})$$
$$0 < \operatorname{Im} z_{n+1} \leqslant \operatorname{Im} z_n \quad (\text{kladná } \& \text{ nerostoucí } \{\operatorname{Im} z_n\})$$

a současně

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n = 0 = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n \quad \left(\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = 0\right),$$

pak řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z_n \quad \text{konverguje.}$$

Příklad:

i) Zjistěte, zda řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ konverguje.
S využitím předchozího důsledku víme, že stačí vyšetřit konvergenci reálných řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \frac{i^n}{n} \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} \frac{i^n}{n}.$$

Jelikož ale

$$\operatorname{Re} \frac{i^n}{n} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^k}{2k}, & n=2k \\ 0, & n=2k+1 \end{cases} \qquad \operatorname{Im} \frac{i^n}{n} = \begin{cases} 0, & n=2k \\ \dfrac{(-1)^k}{2k+1}, & n=2k+1 \end{cases}$$

plyne konvergence obou řad z Leibnizova kritéria (nerostoucí posloupnost kladných čísel$\to 0$ pro $(-1)^n a_n$). A tedy daná komplexní řada konverguje.

▲

ii) Najděte součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+i(-1)^{n-1}\cdot n}{n^2}$
Opět s pomocí předchozího důsledku stačí vyšetřit reálné řady

$$\sum \frac{1}{n^2} \quad \text{a} \quad \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

S využitím mocninných řad zjistíme, že

$$\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{a} \quad \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2,$$

a tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + i(-1)^{n-1}\cdot n}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + i \ln 2.$$

▲

Pochopitelně i pro komplexní řady máme Cauchyho-Bolzanovo kritérium.

Věta 2.3 (*Cauchy-Bolzano pro konvergentní řady*)

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *konverguje právě tehdy, když*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ takový, že platí } \left|\sum_{j=m+1}^{n} z_j\right| < \varepsilon\ \forall m, n \in \mathbb{N} \text{ splňující } n > m \geqslant n_\varepsilon.$$

Důkaz. Tvrzení plyne přímo ze vztahu

$$\sum_{j=m+1}^{n} z_j = s_n - s_m$$

a cauchyovskosti posloupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ ∎

Začneme-li přehazovat členy konvergentní posloupnosti, mohou nastat velmi zvláštní situace. Abychom takovému chování zabránili, potřebujeme absolutní konvergenci.

Definice 2.4

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ se nazývá absolutně konvergentní (AK), jestliže (reálná) řada $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ konverguje. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ se nazývá neabsolutně (relativně) konvergentní (NAK), jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konverguje a (reálná) řada $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ diverguje.

Historická poznámka: V roce 1833 si Cauchy všiml, že konvergentní řada s reálnými členy, jejíž ne všechny členy jsou kladné, může mít divergentní "podřady" (řady s vybranými členy). Dirichlet ve své slavné práci "Proof that every unbounded arithmetic progression whose first term and common difference are integers without common divisors contains infinitely many primes" z roku 1837 prezentoval dvě (neabsolutně) konvergentní řady

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \qquad \& \qquad 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots$$

vzniklé změnou uspořádání a mající různé součty, konkrétně $\log 2$ a $\frac{3}{2}\log 2$. V téže práci Dirichlet dokázal větu o záměně uspořádání pro řady s reálnými členy. Riemann ve své habilitační práci z roku 1854 (v níž mimo jiné zavedl "svůj" integrál) napsal, že Dirichlet již kolem roku 1829 věděl, že "nekonečné řady lze rozdělit do dvou zásadně odlišných tříd podle toho, zda zůstávají konvergentní či nikoli poté, co jsou všechny jejich členy učiněny kladnými. V řadách prvního typu mohou být členy libovolně permutovány, zatímco hodnota součtu řad druhého typu záleží na uspořádání jejich členů." Objev tohoto zdánlivého paradoxu výrazně přispěl k opětovnému zkoumání teorie nekonečných řad a jejímu postavení na pevné základy (posloupnosti částečných součtů). 15. listopadu 1855 si Riemann poznačil, že "rozpoznání toho, že nekonečné řady můžeme rozdělit do dvou tříd (podle závislosti její limity na uspořádaní jejích členů či nikoli) představuje zlomový bod v chápaní nekonečna v matematice".

Následující tvrzení popisuje základní vztah mezi absolutní konvergencí a konvergencí, což velmi dobře známe již z reálného oboru.

Věta 2.5

Každá absolutně konvergentní řada je konvergentní a platí

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|.$$

Důkaz. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ konverguje a $\varepsilon > 0$ je libovolné. Pak existuje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geqslant n_\varepsilon$ a $m \in \mathbb{N}$ libovolné, je (viz V.2.3)

$$|a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+m}| < \varepsilon.$$

Tedy také $|a_{n+1} + \cdots + |a_{n+m}|| \overset{\triangle-\text{nerovnost}}{\leqslant} |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+m}| < \varepsilon$ pro $n \geqslant n_\varepsilon$, a tudíž řada $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konverguje dle Věty 2.3. Je-li $\{s_n\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ a $\{t_n\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$, pak $|s_n| \leqslant t_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, čehož plyne

$$\lim_{n\to\infty} |s_n| \leqslant \lim_{n\to\infty} t_n,$$

a tedy, neboť $\lim s_n = s \ \Rightarrow \ \lim |s_n| = |s| = |\lim s_n|$, platí

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|.$$

■

Pozn:
Věta 2.5 nám společně s Důsledkem 2.2 dávají jednoduchý návod, jak postupovat při vyšetřování konvergence nekonečných řad v komplexním oboru.

i) zjištění konvergence reálné řady $\sum |z_n|$

↓ nekonverguje-li

ii) zjištění konvergence dvou reálných řad $\sum \operatorname{Re} z_n$ a $\sum \operatorname{Im} z_n$

Tedy z kritérií známých v reálném oboru dostaneme pro část (i) např. toto:

a) *(Srovnávací kritérium)*
Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní reálná řada s nezápornými členy a platí-li $\forall n \in \mathbb{N}$ nerovnost $|z_n| \leqslant a_n$ nebo $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \leqslant \frac{a_{n+1}}{a_n}$, pak řada $\sum z_n$ konverguje absolutně. Zejména, je-li $\lim_{n\to\infty} \frac{|z_n|}{a_n} = q < +\infty$ pak řada $\sum z_n$ konverguje absolutně.
Je-li $0 < b_n \leqslant |z_n|$ & $\sum b_n$ diverguje nebo $\lim \frac{|z_n|}{b_n} = q > 0$ & $\sum b_n$ diverguje $\Rightarrow \sum |z_n|$ diverguje.

Za pomoci srovnávacího kritéria se dá Věta 2.5 odvodit i beze Cauchyho-Bolzanova kritéria konvergence ...

Důkaz V.2.5 bez C-B. Konvergence $\sum |z_n|$ je ekvivalentní s konvergencí $\sum \sqrt{(\operatorname{Re} z_k)^2 + (\operatorname{Im} z_k)^2}$, což implikuje konvergenci $\sum |\operatorname{Re} z_k|$ a $\sum |\operatorname{Im} z_k|$ podle srovnávacího kritéria pro řady s nezápornými členy (neboť $|\operatorname{Re} z_k| \leqslant \sqrt{(\operatorname{Re} z_k)^2 + (\operatorname{Im} z_k)^2}$ a totéž pro $|\operatorname{Im} z_k|$). Stačí tedy ukázat, že konvergence těchto řad implikuje konvergenci $\sum \operatorname{Re} z_k$ a $\sum \operatorname{Im} z_k$, z čehož vyplyne konvergence $\sum z_k$ (viz Důsledek 2.2). Jenže toto jsou řady s reálnými členy, takže stačí ukázat, že konvergence $\sum |a_k|$, $a_k \in \mathbb{R}$ implikuje konvergenci $\sum a_k$. (To ale víme z $\mathbb{R}$.)
Jelikož $0 \leqslant a_k + |a_k| \leqslant 2|a_k| \ \ \forall k \in \mathbb{N}$, platí

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} (a_k + |a_k|) \leqslant \sum_{k=1}^{n} 2|a_k| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} 2|a_k| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Jelikož řada napravo je konvergentní, je $s_n := \sum_{k=1}^{n}(a_k+|a_k|)$ ohraničenou monotónní posloupností částečných součtů a tedy $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+|a_k|)$ musí být konvergentní. Poněvadž ale $\sum a_k = \sum(a_k + |a_k|) - \sum|a_k|$ je rozdílem konvergentních posloupností, je sama nutně konvergentní. ∎

b) *(Odmocninové kritérium)*
Je-li $\sqrt[n]{|z_n|} \leqslant q < 1$ pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$ nebo $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|} = q < 1 \;\Rightarrow\; \sum z_n$ konverguje absolutně.
Je-li $\sqrt[n]{|z_n|} \geqslant 1$ pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$ nebo $\lim \sqrt[n]{|z_n|} > 1 \;\Rightarrow$ řada $\sum|z_n|$ diverguje.

c) *(Podílové kritérium)*
Je-li $\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} \leqslant q < 1$ pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$ nebo $\lim_{n\to\infty}\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = q < 1 \;\Rightarrow\; \sum z_n$ konverguje absolutně.
Je-li $\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} \geqslant 1$ pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$ nebo $\lim_{n\to\infty}\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} > 1 \;\Rightarrow$ řada $\sum|z_n|$ diverguje.

d) *(Integrální kritérium)*
Existuje-li nezáporná, nerostoucí a spojitá funkce na $[1,\infty)$ taková, že $f(n) = |z_n|\ \forall n \in \mathbb{N}$, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty}|z_n| \text{ konverguje } \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \text{ konverguje.}$$

Navíc z dvojice nerovností

$$\max\{|\operatorname{Re} z_n|, |\operatorname{Im} z_n|\} \leqslant |z_n| \leqslant |\operatorname{Re} z_n| + |\operatorname{Im} z_n|$$

plyne následující ekvivalence, která dává další způsob, jak rozhodnout o AK komplexních řad.

Věta 2.6

Komplexní řad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ je absolutně konvergentní právě tehdy, když jsou absolutně konvergentní reálné řady $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Re} z_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Im} z_n$.

Nyní ještě zbývají dvě poslední tvrzení, která ukazují, že AK řady v komplexním oboru se při přerovnávaní a vzájemném násobení chovají hezky (stejně jako v $\mathbb{R}$).

Věta 2.7 (*o přerovnání AK řad v $\mathbb{C}$ = komutativní zákon pro AK řady*)

Jestliže komplexní nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ je AK, pak každé její "přerovnání" je také AK a má tentýž součet, tj.

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_{\tau(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

pro libovolnou bijekci $\tau:\ \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ (tj. permutaci množiny $\mathbb{N}$).

Důkaz. Nejdříve ukážeme druhou část, tj. konvergenci $\sum z_{\tau(n)}$ a rovnost součtů.
Položme $s := \sum_{n=1}^{\infty} z_n$. $\forall\varepsilon > 0$ zvolme $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty}|z_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ (existuje díky AK: $\widetilde{s_n} - \widetilde{s} \overset{n\to\infty}{\to} 0 \;\Leftrightarrow\; \sum_{n+1}^{\infty}|z_j| \to 0$)
$\widetilde{s_n}=\sum_1^n|z_j|$
Označme $F_\varepsilon := \tau^{-1}(\{1,\dots,n_\varepsilon\})$ a $N_\varepsilon := \max F_\varepsilon$. Pak platí $\{1,2,\dots,n\} \supseteq F_\varepsilon$ pro $n \geqslant N_\varepsilon$, a tedy

$\tau(\{1,2,\dots,n\}) \supseteq \tau(F_\varepsilon) = \{1,\dots,n_\varepsilon\}$.
Pro tato n pak máme

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{n} z_{\tau(j)} - s\right| &= \left|\sum_{j\in F_\varepsilon} z_{\tau(j)} - s + \sum_{j\in\{1,\dots,n\}\setminus F_\varepsilon} z_{\tau(j)}\right| \\ &= \left|\sum_{k\in\tau(F_\varepsilon)} z_k - s + \sum_{k\in\tau(\{1,\dots,n\})\setminus\tau(F_\varepsilon)} z_k\right| \\ &\leqslant \left|\sum_{k=1}^{n_\varepsilon} z_k - s\right| + \sum_{k\in\tau(\{1,\dots,n\})\setminus\{1,\dots,n_\varepsilon\}} |z_k| \\ &\leqslant 2\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty} |z_k| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\tau(n)}$ je tedy konvergentní (ukázali jsme, že n-tý částečný součet konverguje k s) a její součet je roven s.
Řada $\sum_{n=1}^{\infty} |z_{\tau(n)}|$ je také AK, neboť je přerovnáním AK řady $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ (to je řada v $\mathbb{R}$ a tvrzení plyne odtud)$\searrow$

Je-li $\varepsilon > 0$ libovolné, pak z AK řady $\sum |z_n|$ plyne existence $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takového, že $\sum_{j=n}^{n+m} |z_j| < \varepsilon^{(*)}$ $\forall n \geqslant n_\varepsilon$ a $m \in \mathbb{N}$. (V.2.3) Jelikož $\{\tau(n)\}_{n=1}^{\infty}$ je permutace $\mathbb{N}$, existuje $p \in \mathbb{N}$ takové, že $\{1,2,\dots,n_\varepsilon\} \subseteq \tau(\{1,2,\dots,p\})$. Nechť jsou nyní $n > p$ a $m \in \mathbb{N}$ libovolná. Označíme-li $t := \max\{\tau(n+1),\dots,\tau(n+m)\}$, pak máme $|z_{\tau(n+1)}| + \cdots + |z_{\tau(n+m)}| \underset{(\bullet)}{\leqslant} |z_{n_\varepsilon+1}| + \cdots + |z_t| < \varepsilon$ dle $(*)$, a tedy řada $\sum |z_n|$ je konvergentní dle C-B kritéria pro řady (V.2.3.) $(\bullet) \rightsquigarrow \tau(n+1),\dots,\tau(n+m) \geqslant n_\varepsilon + 1$, neboť $n > p$, tj. přidali jsme některé členy (máme vše od $n_\varepsilon + 1$ po t).

■

Pozor! Riemannova věta o přerovnání již v $\mathbb{C}$ neplatí beze změny. Jestliže L značí množinu čísel $c \in \mathbb{C}$ takových, že existuje bijekce $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, pro níž platí $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\tau(n)} = c$ (tj. L = množina součtů indukovaných přerovnáním řady $\sum z_n$), pak lze ukázat, že může nastat právě jedna z možností:

i) $L = \varnothing$ ($\Rightarrow$ divergence)

ii) $L = \{c\}$ ($\Leftrightarrow$ absolutní konvergence) důkaz $\boxed{*}$

iii) L je přímka v $\mathbb{C}$ $\left(\text{např. } L = (\mathbb{R} + i) \text{ pro } \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n} + \frac{i}{n(n+1)}\right]\right)$

iv) $L = \mathbb{C}$ (např. $\sum z_n$ taková, že $z_{2k} \in \mathbb{R}$, $z_{2k+1} \in i\mathbb{R}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ a řady $\sum z_{2k}$ & $\sum z_{2k+1}$ jsou neabsolutně konvergentní).

↑

toto plyne z faktu, že v případě NAK řady $\sum z_k$ musí být alespoň jedna z řad $\sum \operatorname{Re} z_k$ a $\sum \operatorname{Im} z_k$ také NAK. Lze ji proto přerovnat k libovolnému součtu, ovšem současně nevíme nic o druhé řadě, tj.

i) $\sum \operatorname{Re} z_k$ & $\sum \operatorname{Im} z_k$ = D+D

ii) $\sum \operatorname{Re} z_k$ & $\sum \operatorname{Im} z_k$ = AK+AK

iii) $\sum \operatorname{Re} z_k$ & $\sum \operatorname{Im} z_k$ = AK+NAK nebo NAK+AK

iv) $\sum \operatorname{Re} z_k$ & $\sum \operatorname{Im} z_k$ = NAK+NAK

Důkaz $\boxed{*}$.
Implikace "⇐" je obsahem Věty 2.7.
Důkaz implikace "⇒" je mnohem složitější - de facto je důsledkem tzv. Dvoretzkeho-Rogersovy věty z roku 1950:

Každá *nepodmíněně konvergentní* řada v Banachově prostoru X je absolutně konvergentní ⇔ prostor X má konečnou dimenzi.

■

Nechť X . . . topologický vektorový prostor, $x_i \in X$ pro $i \in I$,
potom řada $\sum_{i\in I} x_i$ je *nepodmíněně konvergentní*, jestliže

i) $I_0 = \{i \in I, x_i \neq 0\}$ je spočetná

ii) pro každou permutaci množiny I_0 platí $\sum x_i = x$ & $\mathbb{C}$ má konečnou dimenzi

↓ v opačném případě např.

$X = l^2 \ldots$ posloupnosti $\sum x^2 < \infty$
a uvažme posloupnost $(x^k)_{k\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}^*}$ $\quad x_k = (0, \ldots, 0, \underbrace{\frac{1}{k}}_{\substack{\text{n-tý}\\ \text{člen}}}, 0, \ldots, 0)$

Pak řada $\sum_{k=1}^{\infty} x^{(k)}$ konverguje k $x = (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots) \in X$ pro každé přerovnání, ale nekonverguje absolutně

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| x^{(k)} \right\|_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

Toto zobecnění Riemannovy věty bylo poprvé zmíněno Lévym v roce 1905. Jeho úplný důkaz podal mezi lety 1913/14 Steinz, který ve skutečnosti ukázal, že pro posloupnost $\{v_n\}$, kde $v_n \in \mathbb{R}^m$, je množina součtů získaných přerovnáním řady $\sum v_n$ buď prázdná nebo to je afinní podprostor $\mathbb{R}^m$.

Věta 2.8 (*o součinu AK řad*)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ jsou AK. Pak každý jejich součin $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ (tj. každá řada $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, ve

které členy v_n probíhají všechny možné součiny $z_j w_n$ právě jednou) je AK a platí

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} w_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

Důkaz. Ke každému $N \in \mathbb{N}$ existuje $M \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\{v_1, \ldots, v_N\} \subseteq \{z_j w_n \text{ pro } 1 \leqslant j \leqslant M \;\&\; 1 \leqslant n \leqslant M\}\,.$$

Potom platí

$$\sum_{n=1}^{N} |v_n| \leqslant \sum_{j=1}^{M} |z_j| \sum_{n=1}^{M} |w_n| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |z_j| \sum_{n=1}^{\infty} |w_n| < \infty.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|$ je tedy AK (má ohraničené částečné součty). K určení součtu v řady $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ můžeme použít libovolné uspořádání členů $z_j w_n$ (díky Větě 2.7), které dostaneme vynásobením výrazů $(z_1 + \cdots + z_k)(w_1 \cdots + w_k)$ člen po členu, tj. je-li s_n částečný součet $\sum z_n$, t_n pro $\sum w_n$ a x_n pro $\sum v_n$, pak

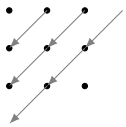
$$\begin{aligned}
x_1 &= s_1 t_1 \\
x_2 &= (z_1 + z_2)\,(w_1 + w_2) = s_2 t_2 \\
x_3 &= (z_1 + z_2 + z_3)\,(w_1 + w_2 + w_3) = s_3 t_3 \\
&\vdots \\
x_k &= s_k t_k.
\end{aligned}$$

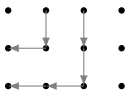
Odtud plyne

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} s_k t_k = s \cdot t = \left(\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} w_n\right).$$

■

Pozn:
Při splnění požadavku Věty 2.8 je zejména konvergentní Cauchyho součin řad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$, tj. $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, kde $v_n = \sum_{j=0}^{n-1} z_{1+j} w_{n-j}$.
Po diagonálách příp. po čtvercích=Dirichletův součin





Historická poznámka: Toto tvrzení pochází od Cauchyho z roku 1821 (Cours d'analyse). Současně poznamenejme, že požadavek AK obou řad je zcela klíčový. Např. pro NAK řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ je její součin se sebou divergentní. Vskutku, jelikož

$$0 \leqslant (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

pro libovolné $x, y \in \mathbb{R}$,
máme

$$2\sqrt{j}\sqrt{n} \leqslant j + n.$$

Proto pro $k = n + j$ máme

$$(-1)^k z_n z_j = \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{j}} \geqslant \frac{2}{k},$$

a tedy

$$(-1)^k \nu_k = \sum_{n+j=k} (-1)^k z_j z_k \geqslant \sum_{n+j=k} \frac{2}{k} = \underbrace{(k-1)}_{\substack{\text{kolika způsoby} \\ \text{dostanu k jako n+j?}}} \cdot \frac{2}{k} = 2 - \underbrace{\frac{2}{k}}_{k \geqslant 2} \geqslant 1$$

pro všechna $k \in \mathbb{N}$. Takže určitě $\lim_{k\to\infty} \nu_k \neq 0$, a tedy řada $\sum \nu_k$ nemůže být konvergentní.

3. Základy kalkulu v $\mathbb{C}$

Středobodem našeho zájmu v celé matematické analýze jsou především funkce a my si nyní tento koncept rozšíříme i do komplexního oboru. Vybudujeme si základy infinitesimálního počtu a podíváme se podrobněji na ty partie, které budou hrát klíčovou roli v dalším rozvoji naší analýzy v $\mathbb{C}$. Upozorníme samozřejmě na odlišnost oproti $\mathbb{R}$ - první z nich je, že celé budování naší teorie probíhá velmi odlišně oproti reálnému oboru.
Funkcí v komplexním oboru rozumíme zobrazení $f : X \to Y$, kde $X, Y \subseteq \widetilde{\mathbb{C}}$ (zejména $\mathbb{C}$ nebo $\mathbb{R}$). Jestliže $f(x) \in \mathbb{R}\ \forall x \in X$, pak hovoříme o reálné funkci, pro $f(x) \in \widetilde{\mathbb{C}}$ máme komplexní funkci a pro $f(x) \in \mathbb{C}$ dostaneme konečnou funkci (tuto terminologii ale příliš používat nebudeme). Jestliže $X \subseteq \mathbb{R}$, je f funkcí reálné proměnné a v opačném případě (tj. $X \subseteq \widetilde{\mathbb{C}}$ & $X \nsubseteq \mathbb{R}$) máme funkci komplexní proměnné. Zejména, $f : \widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}$ je komplexní funkcí komplexní proměnné.

Pojem ε-okolí jsme si zavedli již na začátku minulé kapitoly, tj. $\mathcal{O}_\varepsilon(z_0) \coloneqq K(z_0\varepsilon)$ pro $z_0 \in \mathbb{C}$ a $\mathcal{O}_\varepsilon(\infty) \coloneqq K(\infty, \varepsilon) = \widetilde{\mathbb{C}} \setminus \overline{K(0, \frac{1}{\varepsilon})}$. Někdy budeme (s trochou nedbalosti) psát pouze $\mathcal{O}(z_0)$ pro $z_0 \in \widetilde{\mathbb{C}}$. Ryzím okolím $\mathcal{O}^*(z_0)$ pak rozumíme $\mathcal{O}(z_0) \setminus \{z_0\}$.
Je-li dána funkce $f : X \subseteq \widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}$ a hromadný bod $z_0 \in X$ (tj. $\forall \varepsilon > 0$ obsahuje $\mathcal{O}^*(z_0)$ nekonečně mnoho bodů množiny X).
Potom řekneme, že funkce f má v bodě z_0 limitu $w_0 \in \widetilde{\mathbb{C}}$ vzhledem k množině X, a píšeme

$$\lim_{\substack{z\to z_0 \\ z\in X}} f(z) = w_0,$$

jestliže pro každé okolí $\mathcal{O}_\varepsilon(w_0)$ bodu w_0 existuje ryzí okolí $\mathcal{O}^*(z_0)$ bodu z_0 takové, že $\forall z \in \mathcal{O}^*(z_0) \cap X$ platí $f(z) \in \mathcal{O}_\varepsilon(w_0)$.

Zejména je-li funkce f definovaná v nějakém ryzí okolí $\mathcal{O}^*(z_0)$ bodu z_0, pak definujeme pojem limity funkce f v bodě z_0 obvyklým způsobem (tj. $\ldots \forall z \in \mathcal{O}(z_0) \ldots$). Tuto limitu značíme jako $\lim_{z\to z_0 f(z)}$. Existuje-li tato limita, pak nutně platí

$$\lim_{z\to z_0 f(z)} = \lim_{\substack{z\to z_0 \\ z\in\mathcal{O}^*(z_0)}} .$$

Pro limity a limity vzhledem k množině platí analogická pravidla jako v $\mathbb{R}$, tj.

i) $\lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = \left|\lim\limits_{z\to z_0} f(z)\right|$,

ii) $\lim\limits_{z\to z_0} \left[f(z) \dot{\pm} g(z)\right] = \lim\limits_{z\to z_0} f(z) \dot{\pm} \lim\limits_{z\to z_0} g(z)$,

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z\to z_0} f(z)}{\lim_{z\to z_0} g(z)},$$

mají-li pravé strany uvedených rovností smysl.

Důkaz.

i) Nechť $\lim f(z) = A \in \mathbb{C}$ & $f : X \to Y$.
Protože $||f(z)| - |A|| \leqslant |f(z) - A|$, pak z definice limity

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \mathcal{O}^*_\delta(z_0)(\cap X) \text{ tak, že } \forall z \in \mathcal{O}^*_\delta(z_0)(\cap X) \text{ platí } |f(z) - A| < \varepsilon$$

a tudíž $||f(z)| - |A|| \leqslant |f(z) - A| < \varepsilon$ takže $\lim |f(z)| = A$.
Je-li $\lim f(z) = \infty$, pak definice říká

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \mathcal{O}^*_\delta(z_0)(\cap X) \text{ tak, že } \forall z \in \mathcal{O}^*_\delta(z_0)(\cap X) \text{ platí } |f(z)| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

A protože $\Big||f(z)|\Big| = |f(z)|$, je tato podmínka i pro $|f(z)|$, tudíž $\lim |f(z)| = \infty$.

ii) Jsou-li obě limity konečné, je důkaz stejný jako v $\mathbb{R}$. Uvažme $\pm$ a $\lim f(z) = \infty$ a $\lim g(z) = B \in \mathbb{C}$. Protože $\infty + B = \infty$ musíme ukázat, že

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \mathcal{O}^*_\delta(z_0)(\cap X) \text{ tak, že } \forall z \in \mathcal{O}^*_\delta(z_0) \text{ platí } |f(z) \pm g(z)| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Jelikož $B \in \mathbb{C}$, existuje $\mathcal{O}^*_\delta(z_0)$ takové, že $\forall z \in \mathcal{O}^*_\delta(z_0)$ platí $|g(z)| \overset{(*)}{<} |B| + 1$.

$(*)\ldots$ vezmu $|g(z) - B| < 1$ a protože
$|g(z)| - |B| \leqslant |g(z) - B| < 1$
$\Rightarrow\ |g(z)| < |B| + 1$

Pak pro dané $\varepsilon > 0$ můžu vzít $\mathcal{O}^*_\delta(z_0) \subset \mathcal{O}^*_{\tilde{\delta}}(z_0)$ takové, že $|f(z)| > \frac{1}{\varepsilon} + |B| + 1$ (díky definici limity). Jenže v takovém okolí pak platí

$$|f(z) \pm g(z)| \geqslant |f(z)| - |g(z)| > \frac{1}{\varepsilon} + |B| + 1 - (|B| + 1) = \frac{1}{\varepsilon},$$

a důkaz je tedy hotov.

■

Mějme funkci f a položme $u(z) \coloneqq \operatorname{Re} f(z)$ a $v(z) \coloneqq \operatorname{Im} f(z)$. Pak u, v jsou reálné funkce komplexní proměnné a platí

$$f(z) \equiv u(z) + iv(z).$$

Funkce $u(z)$ a $v(z)$ se nazývají reálná a imaginární část funkce f. Navíc pro $z = x + iy$ je $u(z) = u(x, y)$ a $v(z) = v(x, y)$, tj. u, v jsou reálné funkce dvou reálných proměnných a (vzhledem k izomorfismu mezi $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}^2 \Rightarrow z = x + iy = (x, y)$

$$f(z) = f(x + iy) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

(Odtud také snadno nahlédneme, že existence konečné limity v z_0 implikuje existenci okolí bodu z_0, na kterém je funkce f ohraničená.)
Např. pro $f(z) = z^2 + 1$ máme

$$\begin{aligned} f(z) = z^2 + 1 \Rightarrow f(x, y) &= (x + iy)^2 + 1 = x^2 + 2ixy - y^2 + 1 \\ &\Downarrow \\ \operatorname{Re} f = u(x, y) &= z^2 - y^2 + 1 \\ \operatorname{Im} f = v(x, y) &= 2xy, \end{aligned}$$

nebo $f(z) = \frac{1}{z}$ dává

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{x + iy} &= \frac{x - iy}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2} \\ &\Downarrow \\ \operatorname{Re} f = u(x, y) &= \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \operatorname{Im} f = v(x, y) &= -\frac{y}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Pak podobně jako pro komplexní čísla $z = x + iy$ máme

$$0 \leqslant |x| \leqslant |z|, \qquad 0 \leqslant |y| \leqslant |z| \quad \& \quad 0 \leqslant |z| \leqslant |x| + |y|.$$

Platí také pro funkce $f = u + iv$ nerovnosti

$$\begin{aligned} &u(x, y) \leqslant |u(x, y)| \leqslant |f(x, y)|, \qquad v(x, y) \leqslant |v(x, y)| \leqslant |f(x, y)| \\ &\text{a} \qquad |f(x, y)| \leqslant |u(x, y)| + |v(x, y)|. \end{aligned}$$

Pak zřejmě platí

i) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{z \to z_0} \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re} w_0 \;\&\; \lim\limits_{z \to z_0} \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im} w_0,$

ii) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{z \to z_0} \overline{f(z)} = \overline{w_0},$
$\overline{f(z)} \coloneqq \operatorname{Re} f(z) - \operatorname{Im} f(z)$ je funkce komplexně sdružená.

Také platí

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = w_0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{z\to 0} f\left(\tfrac{1}{z}\right) = w_0, \qquad (*)$$
$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \;\Leftrightarrow\; \lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0,$$
$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty \;\Leftrightarrow\; \lim_{z\to 0} \frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)} = 0,$$

přičemž je užitečné mít na paměti, že zobrazení $z \mapsto \frac{1}{z}$ zobrazí $K(0,\varepsilon)\setminus\{0\}$ na $K(\infty,\varepsilon) = \mathbb{C}\setminus\overline{K(0,\frac{1}{\varepsilon})}$.

Funkci $f : X \to \widetilde{\mathbb{C}}$ nazveme spojitou v bodě $z_0 \in X$ vzhledem k X, jestliže

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in X}} f(z) = f(z_0)\,.$$

Funkce f je spojitá na X, jestliže je spojitá v každém bodě $z_0 \in X$ vzhledem k X. Je-li $X = D(f)$ a z_0 vnitřním bodem množiny X, pak mluvíme o spojitosti funkce f v bodě z_0. Spojitost lze definovat také pomocí posloupností (Heine), tj. pro každou posloupnost $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, $z_n \to z_0$ (a $z_n \in X$), platí $f(z_n) \to f(z_0)$. Díky ekvivalenci $(*)$ výše je spojitost funkce f v $z_0 = \infty$ ekvivalentní se spojitostí funkce $f(\frac{1}{z})$ v 0 (což pochopitelně vyžaduje, aby f byla definovaná v nějakém ryzím okolí ∞, tj. $\forall z \in \mathbb{C}$ splňujícím $|z| > R$ pro nějaké $R \geqslant 0$).

Zřejmě také platí

i) funkce f je spojitá v bodě z_0 $\Leftrightarrow$ funkce $\operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f$ jsou spojité v z_0,

ii) funkce f je spojitá v z_0 $\Leftrightarrow$ funkce $\overline{f}$ je spojitá v z_0.

Historická poznámka: Za dob Leibnize a Eulera byly studovány převážně reálné funkce reálné proměnné. Odtud se matematici začali pomalu vydávat směrem ke komplexním funkcím komplexní proměnné. Proto slavný Eulerův vzorec $e^{iz} = \cos z + i\sin z$ z roku 1748 byl původně odvozen pouze pro $z \in \mathbb{R}$. Prvním, kdo si uvědomil, že mnoho vlastností klasických funkcí může být zcela pochopeno teprve ve chvíli, kdy povolíme komplexní proměnné, byl Gauss (jak je patrné z jeho dopisu Besselovi).
Slovo "funkce" se objevuje u Leibnize v roce 1692 jako pojmenování jistých velikostí (jako x-ová souřadnice, poloměr křivosti atd.) v bodě, který se mění při pohybu po křivce. Už v roce 1698 hovoří Johan Bernoulli v dopise Leibnizovi o "libovolné funkci ordinátů" (y-ové souřadnici) a v roce 1718 označuje funkcí libovolnou "velikost, která vyrůstá společně z proměnné a libovolných konstant". Euler v "Introductio in Analysin Infinitoru" z roku 1748 nazýval funkcí libovolné analytické vyjádření obsahující proměnnou a konstanty.
Rozšíření konceptu funkce se stalo nevyhnutné kvůli práci d'Alemberta, Eulera, Daniela Bernoulliho a Lagrange na problému vibrující struny. Proto Euler opustil myšlenku založenou na analytickém rozvoji (a priorní předpoklad jeho existence není správný?!) a zavedl tzv. "libovolné funkce". Nicméně dnešní definice funkce jakožto jednoznačné přiřazení hodnot nebo zobrazení je především Dirichletovou zásluhou. Ve svém článku z roku 1829 zavedl funkci $\varphi(x)$, která je "rovna jisté konstantě d, jestliže hodnota proměnné x je iracionální". A v článku z roku 1837 napsal k rozšíření konceptu funkce: "Jistě není nutné, aby pravidlo závislosti $f(x)$ na x bylo stejné na celém

intervalu. Ve skutečnosti, dokonce ani nepotřebujeme uvažovat danou závislost jakožto vyjádřenou explicitními matematickými operacemi."
Leibniz a Euler (intuitivně) pracovali s velmi silným pojetím spojitosti, které v podstatě splývá s analytičností nebo s generováním analytickými funkcemi. Naše aktuální pojetí (a jeho přesná aritmetická formulace) pochází z 19. století a vychází z prací Bolzana, Cauchyho a Weierstrasse. Ještě v roce 1837 Dirichlet zavedl definici, kde říká, že "f(x) se mění pozvolna, pokud se x také mění pozvolna". Idea spojitosti zobrazení mezi obecnými topologickými prostory vychází z Hausdorffovy knihy z roku 1914.

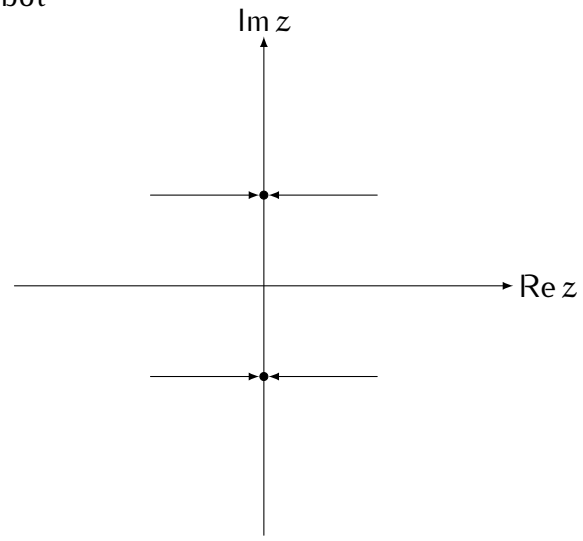
Věta 3.0

Funkce $\arg z$ *je spojitá v každém bodě* $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ *s výjimkou záporné reálné osy.*

Důkaz. Připomeňme, že

$$\arg z = \arg x + iy = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x}, & x > 0 \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi, & x < 0 \ \&\ y > 0 \\ \arctan\frac{y}{x} - \pi, & x < 0 \ \&\ y \leqslant 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \ \&\ y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0 \ \&\ y < 0 \end{cases}$$

Jelikož $\arg z \in \mathbb{R}\ \forall z \in \mathbb{C}$ (tj. $\operatorname{Re}\arg z = \arg z$ & $\operatorname{Im}\arg z \equiv 0$), je spojitost $\arg z$ ekvivalentní se spojitostí v reálném oboru. Je zřejmé, že $\arg z$ je spojitá uvnitř jednotlivých kvadrantů (díky spojitosti $\arctan w$). Pro $x = 0$ & $y > 0$ máme hodnotu $\frac{\pi}{2}$ a limitním přechodem dostaneme totéž, neboť



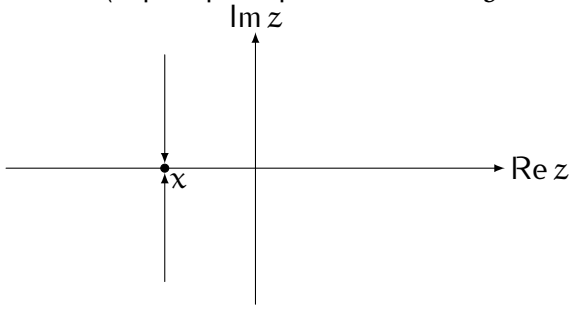
$$\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y>0}} \arg z = \lim_{\substack{x\to 0^+\\ y>0}} \arctan \overset{\to+\infty}{\frac{y}{x}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0^-\\ y>0}} \arg z = \lim_{\substack{x\to 0^-\\ y>0}} \left(\arctan \overset{\to-\infty}{\frac{y}{x}} + \pi\right) = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}.$$

Podobně pro $x = 0$ a $y < 0$ máme hodnotu $-\frac{\pi}{2}$ a

$$\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y<0}} \arg z = \lim_{\substack{x\to 0^+\\ y<0}} \arctan \overset{\to -\infty}{\frac{y}{x}} = -\frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{\substack{x\to 0^-\\ y<0}} \arg z = \lim_{\substack{x\to 0^-\\ y<0}} \left(\arctan \overset{\to +\infty}{\frac{y}{x}} - \pi\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Spojitost na kladné části reálné osy je také zřejmá, zatímco na záporné části reálné osy máme hodnotu $-\pi$ (z předpisu pro $x < 0$ & $y \geqslant 0\ldots$ totéž jako limita pro $y \to 0^-$ a $x > 0$), za-



$$\lim_{\substack{y\to 0^+\\ x<0}} \arg z = \lim_{\substack{y\to 0^+\\ x<0}} \left(\arctan \overset{\to 0}{\frac{y}{x}} + \pi\right) = \pi,$$

tímco
tedy $\arg z$ má na záporné části reálné osy neodstranitelnou nespojitost I. druhu se skokem délky 2π, což dokazuje spojitost $\arg z$ na $\mathbb{C}\setminus(\{z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} z < 0\} \cup \{0\})$. ■

Poznámka:

i) Stejného výsledku dosáhneme i s pomocí alternativního vyjádření, tj.

$$\arg z = \arg(x + iy) = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x}, & x > 0 \\ \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{x}{y}, & x \leqslant 0 \ \&\ y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{x}{y}, & x \leqslant 0 \ \&\ y < 0 \\ -\pi, & x < 0 \ \&\ y = 0. \end{cases}$$

Nicméně v obou případech jsme museli rozdělit $\arg z$ podle jednotlivých kvadrantů v $\mathbb{C}$. To je způsobeno tím, že $\arg z \in [-\pi, \pi)$, zatímco $\arctan w$ nabývá pouze hodnot mezi $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$. Tuto nevýhodu lze obejít pomocí poloviční argumentu....
dokončit?

ii) Analogicky jako ve Větě 3.0 můžeme uvážit i jinou větev funkce $\operatorname{Arg} z$. Potom platí:

Funkce $\arg_\varphi z$ je spojitá v každém bodě $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ s výjimkou bodů na polopřímce vycházející z počátku s body o argumentu φ.

Přičemž $\arg_\varphi z$ značí větev $\operatorname{Arg} z$, pro kterou platí

$$\arg_\varphi z \in [\varphi - 2\pi, \varphi)\,.$$

Pak zjevně $\arg z = \arg_\pi z$.

Limita - klíčový nástroj každého diferenciálního počtu a jeho správné pochopení (a přesné vymezení) je v tomto směru zcela klíčové. S jeho pomocí totiž získáme základní stavební kámen celého kalkulu - derivaci. Ačkoli je nutné podotknout, že její význam se značně otřásá ve světle Weierstrassova (a mnoha jiných) objevu funkce (sice jsou reálné, ale to neubírá na významu), která je spojitá na celém definičním oboru, ale v žádném jeho bodě nemá derivaci.

Jelikož platí

$$u(x,y) = \frac{f+\overline{f}}{2} \quad \& \quad v(x,y) = \frac{f-\overline{f}}{2i},$$

lze řadu výsledků pro komplexní funkce reálné proměnné dostat přímo ze znalostí výsledků pro reálné funkce reálné proměnné, tj pro $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (nebo $\widetilde{\mathbb{C}}$) máme

$$\begin{aligned}
(f \pm g)' &= f' \pm g', \\
(f \cdot g)' &= f'g + fg', \\
\left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g - fg'}{g^2}, \qquad \text{v bodech, na jejichž nějakém okolí je } g \neq 0 \\
(f \circ g)' &= (f' \circ g) \cdot g'
\end{aligned}$$

Je-li $f = u + iv$ definovaná na $[a,b]$, pak $f \in C^1[a,b]$ znamená, že funkce u, v mají spojité derivace na $[a,b]$, přičemž v krajních bodech máme na mysli příslušné jednostranné derivace. Existuje-li $f'(z_0)$ pro $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ nazývá se funkce f diferencovatelná v bodě z_0. A pro $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$?

Definice 3.1

Nechť $D \subseteq \mathbb{C}$ je otevřená množina a $f : D \to \mathbb{C}$ je daná funkce. Řekneme, že funkce f je *komplexně diferencovatelná* v bodě $z_0 \in D$, jestliže existuje konečná limita

$$\lim_{\substack{h\to 0 \\ h\in\mathbb{C}}} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \lim_{\substack{z\to z_0 \\ z\in D}} \frac{f(z_0)-f(z)}{z-z_0}.$$

Tato limita se nazývá *derivací* funkce f v bodě z_0 a značí se $f'(z_0)$ nebo $\frac{df}{dz}(z_0)$.

Příklad: Ukažte, že funkce $f(z) = f(x+iy) = 2y + ix = iz + 3\operatorname{Im} z$ není diferencovatelná v $\mathbb{C}$.
Řešení: Vzhledem ke tvaru funkce f je potřeba uvážit limitu z Definice 3.1. Neboť

$$\underset{h=h_1+ih_2}{\frac{f(z+h)-f(z)}{h}} \overset{\ulcorner f(x+h_1+i(y+h_2))}{=} \frac{2y+2h_2+i(x+h_1)-2y-ix}{h_1+ih_2} = \frac{2h_2+ih_1}{h_1+ih_2},$$

máme

$$\lim_{\substack{h\to 0 \\ h\in\mathbb{C}}} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{2h_2+ih_1}{h_1+ih_2} \underset{\text{např.} h_2=kh_1}{\overset{\text{zvolme}}{=}} \lim_{h_1\to 0} \frac{2kh_1+ih_1}{h_1+ikh_1} = \frac{2k+i}{1+ik}.$$

Jelikož tato limita závisí na hodnotě k, plyne odtud její neexistence, a tudíž nediferencovatelnost f pro libovolné $z \in \mathbb{C}$.

▲

Formálně je Definice 3.1 stejná jako v $\mathbb{R}$ s výjimkou toho, že v komplexním oboru nedefinujeme nevlastní limitu a derivaci v ∞. V další části si ukážeme, "co je na této definici zajímavého".
Na první pohled: ačkoli $\mathbb{C}$ je spíše jako $\mathbb{R}^2$, je derivace definovaná jako v $\mathbb{R}$ - toto ale určitě nejde udělat v $\mathbb{R}^2$ kvůli "dělení vektorem".!!
Dále, v předchozím příkladě jsme viděli, že do z_0 se můžeme blížit různými směry na rozdíl od $\mathbb{R}$, kde bylo možné pouze $x \to x_0^+$ nebo $x \to x_0^-$. To ale připomíná spíše situaci z počítání limit v $\mathbb{R}^2$ - však také nezapomeňme, že $h = (h_1, h_2)$ - jenže tady byla derivace definovaná zcela jinak! Začíná to být hezky propletené...

Derivace vyšších řádů jsou definovány podobně jako v $\mathbb{R}$, tj $f^{(n)}(z) := (f^{(n-1)}(z))'$.

Nyní trocha terminologie...
Afinní zobrazení

$$z \mapsto az + b\overline{z} + c, \quad a, b, c \in \mathbb{C}$$

pro $|a| \neq |b|$ je bijektivní a inverzní zobrazení

$$w \mapsto \frac{\overline{a}}{|a|^2 - |b|^2} w - \frac{b}{|a|^2 - |b|^2} + \frac{-\overline{a}c + b\overline{c}}{|a|^2 - |b|^2}$$

je opět afinní. Afinní zobrazení převádí přímky na přímky (a zachovává rovnoběžnost), kuželosečky na kuželosečky (zachovává elipsy, hyperboly i paraboly).
Speciální případy:
$\mathbb{R}$-lineární zobrazení (centroafinní zobrazení)

$$z \mapsto az + b\overline{z}, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Je-li $|a| \neq |b|$, pak inverze je opět $\mathbb{R}$-lineární. Je to lineární při násobení reálným skalárem, tj.

$$\begin{aligned} &f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2), \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \\ &f(\lambda z) = \lambda f(z), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C}. \qquad (*) \end{aligned}$$

Naopak, splňuje-li zobrazení $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ podmínky $(*) \Rightarrow$ je $\mathbb{R}$-lineární, neboť

$$f(z) = f(x + iy) = x \cdot f(1) + y \cdot f(i) = \frac{z + \overline{z}}{2} f(1) + \overbrace{\frac{z - \overline{z}}{2i}}^{=-\frac{i(z-\overline{z})}{2}} f(i)$$

$$= \frac{1}{2}(f(1) - if(i))\, z + \frac{1}{2}(f(1) + if(i))\, \overline{z}.$$

$\mathbb{C}$-lineární zobrazení

$$z \mapsto az, \quad a \in \mathbb{C}$$

Je-li $a \neq 0 \Rightarrow$ zachovává kružnice a inverze je také $\mathbb{C}$-lineární. Je to lineární, tj.

$$\begin{aligned} &f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2), \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \\ &f(cz) = cf(z), \quad \forall c, z \in \mathbb{C}. \qquad (*) \end{aligned}$$

Naopak, platí-li $(*) \Rightarrow$ je to $\mathbb{C}$-lineární, neboť $f(z) = z \cdot f(1)$.
Pozor! Nevystačíme si pouze s $\mathbb{C}$-lineárním zobrazením, např. $f(z) = \bar{z}$ není $\mathbb{C}$-lineární, ale $\mathbb{R}$-lineární.

Pak platí, zcela analogicky jako v $\mathbb{R}$, že funkce $f : D \to \mathbb{C}$ je komplexně diferencovatelná v $z_0 \in D$ právě tehdy, když existuje $\mathbb{C}$-lineární zobrazení $T(z) = az$ takové, že

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{C}}} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)-T(h)}{h} = 0. \tag{3.1}$$

V takovém případě se výraz $T(h) = ah$ nazývá *diferenciálem funkce f v bodě z_0* a značí se $df(z_0)$ nebo $df(z_0)(h)$. Navíc je zřejmé, že $a = f'(z_0)$.

Podmínka (3.1) je také ekvivalentní s existencí $K(0,\delta) \subset \mathbb{C}$ pro libovolné $\varepsilon > 0$ takového, že $\forall h \in K(0,\delta)$ je

$$\left| f(z_0+h) - f(z_0) - \overbrace{ah}^{T(h)} \right| < \varepsilon |h|. \qquad (*)$$

Současně je limita z Definice 3.1 a podmínka (3.1) ekvivalentní s tzv. Carathéodoryho podmínkou:

Carathéodoryho podmínka
Existuje funkce v_{z_0}

i) definovaná na nějakém okolí bodu z_0,

ii) spojitá v z_0,

iii) a platí $f(z) - f(z_0) = v_{z_0}(z)(z - z_0)$.

Pak platí $f'(z_0) = a = v_{z_0}(z_0)$

Důkaz. Platí-li Definice 3.1 $\Rightarrow$ (3.1), neboť stačí položit $h := z - z_0$, $a = f'(z_0)$ a

$$\lim_{\substack{z-z_0\to 0\\ z-z_0\in\mathbb{C}}} \frac{f(z_0+z-z_0)-f(z_0)-f'(z_0)\cdot(z-z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0}\left(\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)\right) = 0\surd$$

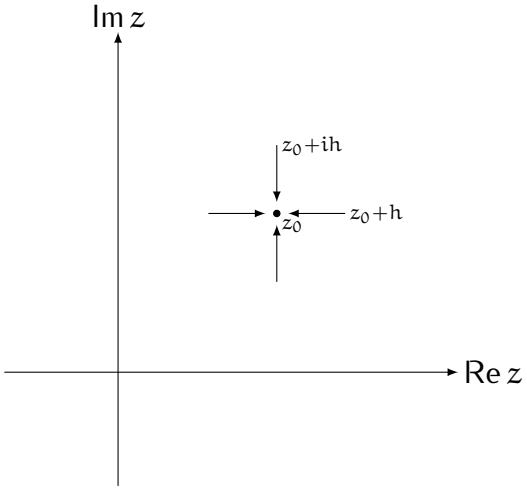
Podmínka $(*)$ je ekvivalentní s (3.1) dle definice limity. Z Definice 3.1 dále plyne, že spojitost v_{z_0} v z_0 dává

$$v_{z_0}(z_0) = \lim_{z\to z_0} v_{z_0}(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0).$$

Z Definice 3.1 také plyne, že v_{z_0} lze volit jako $v_{z_0}(z) = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ a spojitě dodefinovat $v_{z_0}(z_0) := f'(z_0)$. ∎

Poznámka: Je-li funkce f komplexně diferencovatelná v bodě $z_0 = z_0 + iy_0$, pak zejména

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(z_0+ih)-f(z_0)}{ih}$$



Tedy pro komplexně diferencovatelnou funkci musí mít podíl $\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ tutéž limitní hodnotu zejména při přibližování do z_0 ve směru rovnoběžném s osou $\operatorname{Re} z$ i osou $\operatorname{Im} z$. Tento víceméně zřejmý geometrický fakt má ovšem také velmi jednoduché analytické (a snadno zapamatovatelné) vyjádření.
Jelikož $h \in \mathbb{R}$, dostáváme odtud při značení $u(z) \coloneqq \operatorname{Re} f(z)$ a $v(z) \coloneqq \operatorname{Im} f(z)$, že

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{u(x_0+h,y_0)-u(x_0,y_0)}{h} + i\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{v(x_0+h,y_0)-v(x_0,y_0)}{h} \\ &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{u(x_0,y_0+h)-u(x_0,y_0)}{ih} + i\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{v(x_0,y_0+h)-u(x_0,y_0)}{ih}. \end{aligned}$$

Odtud ale vyplývá velmi úzký vztah mezi derivací $f'(z_0)$ komplexní funkce komplexní proměnné v bodě z_0 a parciálními derivacemi její reálné a imaginární části, které chápeme jako reálné funkce dvou proměnných, tj. $f_x(x_0,y_0) = \frac{1}{i}f_y(x_0,y_0) = -if_y(x_0,y_0)$, tedy ekvivalentně,
je-li $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, pak

$$f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0) = -iu_y(x_0,y_0) + v_y(x_0,y_0). \tag{3.2}$$

Nutnou podmínkou pro komplexní diferencovatelnost v bodě z_0 je tedy splnění tzv. Cauchyho–Riemannových rovnic

$$\boxed{u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) \quad \text{a} \quad u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0).}$$

Historická poznámka: Cauchy získal tyto rovnice v Memoárech z roku 1814 při studiu záměny integrace ve dvojrozměrném reálném integrálu. Zdůraznil, že tyto diferenciální rovnice obsahují celou teorii přechodu z reálného do komplexního oboru. Nicméně Cauchy z nich neučinil základ jeho teorie funkcí komplexní proměnné. To učinil Riemann hned na začátku své teorie a zcela konzistentně na nich stavěl. Spatřoval v nich samotnou esenci definice komplexní funkce komplexní proměnné (patrně již a podzim 1847, kdy mu bylo 21 let). Avšak ani Cauchy, ani Riemann nejsou prvními objeviteli těchto rovnic. Ty lze najít již v d'Alembertově práci z roku 1752 a také Eulera či Lagrange.

Protože máme k dispozici aritmetické operace $+, \cdot$ s komplexními čísly, můžeme uvažovat lineární kombinace mocnin z^k, $k \in \mathbb{N}_0$, $z \in \mathbb{C}$, tj. polynomy, tj.

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \quad z \in \mathbb{C},$$

$a_0, \ldots, a_n$ jsou koeficienty. Pro $a_n \neq 0$ máme polynom n-tého stupně. Jsou-li $a_0 = \cdots = a_n = 0$ je $P \equiv 0$, tj P nemá stupeň (též stupeň $-\infty$), zatímco každá nenulová konstantní funkce je polynom stupně 0. Jestliže pro polynom P a čísla $w \in \mathbb{C}, p \in \mathbb{N}$, platí

$$P(z) = (z - z_0)^p P_1(z),$$

kde P_1 je polynom, pro který $P_1(z_0) \neq 0$, budeme z_0 nazývat p-násobným kořenem polynomu P. Jedním z našich cílů bude dokázat tzv. základní větu algebry, která říká, že každý polynom stupně alespoň 1 má alespoň 1 kořen (v $\mathbb{C}$). Jejím důsledkem, je pak skutečnost, že polynom n-tého stupně má pro $n \geqslant 1$ právě n kořenů počítáno včetně násobnosti. Polynomy jsou jistě spojité funkce.
Je-li $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ podílem dvou polynomů, přičemž $Q \not\equiv 0$, nazýváme funkci R racionální lomenou funkcí. Jejím definičním oborem je $\mathbb{C} \setminus \{w \in \mathbb{C} : Q(w) = 0\}$ a R je na něm spojitá. Speciálně $z^{-k} = \frac{1}{z^k}$, $k \in \mathbb{N}$, jsou funkce definované v $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Lze ji vždy rozložit na součet polynomu a konečný počet parciálních zlomků (díky základní větě algebry) $\frac{k_{jk}}{(z-z_j)^{\alpha_{jk}}}$, kde $k_{jk} \in \mathbb{C}, \alpha_{jk} \in \mathbb{N}$.

Později si zavedeme komplexní analogie (rozšíření) dalších funkcí známých z $\mathbb{R}$.

Příklad

i) Dokažte, že $(z^n)' = n \cdot z^{n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ a $z \in \mathbb{C}$.
Řešení: Pro libovolné $z_0 \in \mathbb{C}$ máme

$$\lim_{z \to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \cdots + z_0^{n-2} z + z_0^{n-1})}{z - z_0} = n \cdot z_0^{n-1}.$$

▲

ii) Funkce $f(z) := \overline{z}$ není komplexně diferencovatelná pro žádné $z \in \mathbb{C}$
Řešení: Pomocí C–R podmínek máme

$$f(z) = f(x + iy) = x - iy \;\Rightarrow\; u(x,y) = x \;\&\; v(x,y) = -y$$
$$\Downarrow$$
$$\underset{v_y = -1}{u_x = 1}\,\lightning \qquad \underset{v_x = 0}{u_y = 0}\,\surd$$

▲

Tedy máme velmi jednoduchý příklad spojité funkce na celém $\mathbb{C}$, která ale v žádném bodě $\mathbb{C}$ není komplexně diferencovatelná (v $\mathbb{R}$ je to mnohem složitější - viz Weierstrassova funkce a jiné).
Téhož výsledku samozřejmě dosáhneme také pomocí Definice 3.1, neboť

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{\overline{h}}{h}$$

a

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{\overline{h}}{h} = 1 \neq -1 = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in i\mathbb{R}}} \frac{\overline{h}}{h}.$$

Podobně můžeme ukázat, že ani funkce $f(z) := \operatorname{Re} z$ nebo $f(z) := \operatorname{Im} z$ nebo $f(z) := |z|$ nejsou komplexně diferencovatelné $\forall z \in \mathbb{C}$.

Zcela analogicky tvrzením známým z reálného oboru platí následující.

Věta 3.2

Je-li funkce f komplexně diferencovatelná v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$, pak je v tomto bodě také spojitá.

Důkaz. Jako v $\mathbb{R}$.
Nechť f je komplexně diferencovatelná v z_0. Potom

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Jenže současně

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim \left(f(z) - f(z_0) + f(z_0)\right) = \lim \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot (z - z_0) + \lim f(z_0)$$
$$= \lim \underbrace{\overbrace{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}^{\substack{\text{konečné}\\ \text{číslo}}} \cdot \overbrace{(z - z_0)}^{\to 0}}_{\to 0} + \lim f(z_0) = f(z_0)$$

■

Věta 3.3

(i) Jsou-li funkce f, g komplexně diferencovatelné v bodě z_0, pak jsou v tomto bodě komplexně diferencovatelné také funkce $f \pm g$, $f \cdot g$ a f/g (je-li $g(z_0) \neq 0$) a platí

$$(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0),$$
$$(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)\, g(z_0) + f(z_0)\, g'(z_0),$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)\, g(z_0) - f(z_0)\, g'(z_0)}{g^2(z_0)}.$$

(ii) Je-li f komplexně diferencovatelná v bodě z_0 a funkce g komplexně diferencovatelná v bodě $f(z_0)$, pak funkce $g \circ f$, je komplexně diferencovatelná v z_0 a platí

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))\, f'(z_0).$$

(iii) Nechť funkce f je prostá v okolí $z_0 \in \mathbb{C}$ a komplexně diferencovatelná v bodě z_0. Pak inverzní funkce f^{-1} je komplexně diferencovatelná v bodě $w_0 = f(z_0)$ a platí

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Důkaz. Jako v $\mathbb{R}$.

i) Plyne zcela analogickým postupem jako v $\mathbb{R}$ (díky Definici 3.1).

ii) Protože f, g jsou komplexně diferencovatelné v bodě z_0 a $w_0 = f(z_0)$, existují podle Carathéodoryho podmínky funkce v_1, v_2 definované na nějakém okolí bodu z_0 a bodu w_0 takové, že

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_0) &= v_1(z)(z - z_0), \quad z \in \mathcal{O}(z_0), \\ g(w) - g(w_0) &= v_2(w)(w - w_0), \quad z \in \mathcal{O}(w_0), \end{aligned}$$

přičemž funkce v_1 je spojitá v z_0 a v_2 v w_0 a platí $v_1(z_0) = f'(z_0)$, $v_2(w_0) = g'(w_0)$. Jelikož funkce f je spojitá v z_0 (dle Věty 3.2), platí (po případném zmenšení $\mathcal{O}(z_0)$,) inkluze $f(\mathcal{O}(z_0)) \subset \mathcal{O}(w_0)$ a $\forall z \in \mathcal{O}(z_0)$ máme

$$g(f(z)) - g(f(z_0)) = v_2(f(z))(f(z) - f(z_0)) = v_2(f(z)) \cdot v_1(z) \cdot (z - z_0).$$

Avšak podle věty o spojitosti složené funkce je také funkce $v_2 \circ f$ spojitá, takže součin $(v_2 \circ f) \cdot v_1$ je spojitou funkcí v bodě z_0 a platí

$$\lim_{z \to z_0} \underbrace{v_2(\overbrace{f(z)}^{\to w_0})}_{\substack{\to v_2(w_0) \\ = g'(w_0)}} \underbrace{v_1(z)}_{\to f'(z_0)} = g'(w_0) f'(z_0) = g'(f(z_0)) f'(z_0).$$

Tedy podle Carathéodoryho podmínky je funkce $g \circ f$ diferencovatelná v bodě z_0 a platí požadovaná rovnost.

iii) Dokončit?

■

Ačkoli ověření platnosti C–R podmínek je celkem snadné a v $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{R}^n$ žádné takové kritérium nemáme, jedná se pouze o nutné podmínky, tj. jejich splnění nemusí nutně znamenat komplexní diferncovatelnost. Proto se nyní pojďme podívat, kdy se tomu tak stane. Připomeňme, že v teorii funkcí více proměnných jsme se setkali s tzv. totálním diferenciálem (nebo silnou derivací), tj. reálná funkce $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se nazývá diferencovatelná, jestliže existuje lineární zobrazení $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ takové, že

$$\lim_{h \to 0} \frac{||g(x_0 + h) - g(x_0) - J(h)||_{\mathbb{R}^m}}{||h||_{\mathbb{R}^n}} = 0.$$

V takovém případě se zobrazení $J(h)$ nazývá totální diferenciál funkce g v bodě x_0. Z jeho existence pak plyne také existence všech parciálních derivací prvního řádu funkce g v bodě x_0 a platí

$$J(h) = Jh,$$

kde J na pravé straně značí Jakobiho matici funkce g v bodě x_0.
Ještě pro úplnost dodejme, že (jak jistě víte) pro diferencovatelnost funkce $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ naopak pouhá existence parciálních derivací prvního řadu nestačí,

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

df existuje $\Rightarrow$ f je spojitá,
df existuje $\Rightarrow$ f_x a f_y existují,
f_x a f_y existují $\Rightarrow$ df nemusí existovat,
f je spojitá & f_x, f_y existují $\Rightarrow$ df nemusí existovat,
f_x & f_y jsou spojité $\Rightarrow$ df existuje,
df existuje $\Rightarrow$ f_x a f_y nemusí být spojité.

Definice 3.4

Nechť $D \subseteq \mathbb{C}$ je otevřená množina a $f : D \to \mathbb{C}$. Řekneme, že funkce f je *reálně diferencovatelná v bodě* $z_0 \in D$, jestliže existuje $\mathbb{R}$-lineární zobrazení $T(z) = az + b\bar{z}$ pro nějaká $a, b \in \mathbb{C}$ taková, že platí

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{C}}} \frac{f(z_0+h) - f(z_0) - T(h)}{h} = 0.$$

Výraz $T(h) = ah + b\bar{h}$ se nazývá *totálním diferenciálem funkce* f *v bodě* z_0 a značí se $df(z_0)$ nebo $df(z_0)(h)$.

Je zřejmé, že každá komplexně diferencovatelná funkce je současně reálně diferencovatelná (stačí vzít $b = 0$). Opačné tvrzení ale již neplatí. Vskutku, uvažme např. $f(z) = \bar{z}$. Pak volbou $T(h) = df(z_0)(h) = \bar{h}$ pro libovolné $z_0 \in \mathbb{C}$ dostaneme

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{C}}} \frac{f(z_0+h) - f(z_0) - T(h)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{C}}} \frac{\overbrace{\overline{(z_0+h)} - \overline{z_0} - \overline{h}}^{=0}}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{C}}} \frac{0}{h} = 0,$$

což ukazuje, že tato funkce je reálně diferencovatelná. Ovšem současně již také víme, že tato funkce není komplexně diferencovatelná.

Věta 3.5

Nechť $D \subseteq \mathbb{C}$ *je otevřená množina a* $f : D \to \mathbb{C}$. *Funkce* f *je reálně diferencovatelná v bodě* $z_0 = x_0 + iy_0$ *právě tehdy, když reálné funkce* $u(x,y) := \operatorname{Re} f(z)$ *a* $v(x,y) := \operatorname{Im} f(z)$ *jsou diferencovatelné v bodě* $[x_0, y_0]$. *Přitom platí*

$$a = \tfrac{1}{2}\big[u_x(x_0,y_0) + v_y(x_0,y_0)\big] + \tfrac{i}{2}\big[-u_y(x_0,y_0) + v_x(x_0,y_0)\big],$$
$$b = \tfrac{1}{2}\big[u_x(x_0,y_0) - v_y(x_0,y_0)\big] + \tfrac{i}{2}\big[u_y(x_0,y_0) + v_x(x_0,y_0)\big]$$

a také

$$df(z_0)(h) = du(x_0,y_0)(h_1,h_2) + i\,dv(x_0,y_0)(h_1,h_2),$$

kde $h_1 := \operatorname{Re} h$ *a* $h_2 := \operatorname{Im} h$.

Důkaz. Přímo - využije se rozpis na reálné a imaginární části a pak se aplikují výsledky z $\mathbb{R}^2$. Nechť $\alpha_1 := \operatorname{Re} a$, $\alpha_2 := \operatorname{Im} a$, $\beta_1 := \operatorname{Re} b$, $\beta_2 := \operatorname{Im} b$, $h_1 := \operatorname{Re} h$, $h_2 := \operatorname{Im} h$, $x_0 := \operatorname{Re} z_0$, $y_0 := \operatorname{Im} z_0$. Podmínka

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{C}}} \frac{f(z_0+h) - f(z_0) - T(h)}{h} = 0,$$

kde $T = ah + b\overline{h}$, je ekvivalentní s dvojicí podmínek

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left|u(x_0+h_1,y_0+h_2) - u(x_0,y_0) - \mathrm{Re}(ah+b\overline{h})\right|}{\underbrace{|h|}_{\substack{\text{jsme v } \mathbb{R}^2 \text{ a}\\ \text{beru součtovou metriku}\\ \rightsquigarrow |h_1|+|h_2|}}} = 0$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left|v(x_0+h_1,y_0+h_2) - v(x_0,y_0) - \mathrm{Im}(ah+b\overline{h})\right|}{\underbrace{|h|}_{\rightsquigarrow |h_1|+|h_2|}} = 0$$

přičemž $\triangle_1 := \mathrm{Re}(ah + b\overline{h}) = (\alpha_1+\beta_1)h_1 + (-\alpha_2+\beta_2)h_2$ a
$\triangle_2 := (\alpha_2+\beta_2)h_1 + (\alpha_1-\beta_1)h_2$.
To ale znamená, že f je reálně diferencovatelná v $z_0 \Leftrightarrow u(x,y) = \mathrm{Re}\, f(z)$ a $v(x,y) = \mathrm{Im}\, f(z)$ jsou diferencovatelné v bodě $[x_0,y_0]$. V takovém případě pak platí

$$du(x_0,y_0)(h_1,h_2) = \triangle_1 \quad \& \quad dv(x_0,y_0)(h_1,h_2) = \triangle_2$$

a současně

$$\begin{aligned} u_x(x_0,y_0) &= \alpha_1+\beta_1 & v_x(x_0,y_0) &= \alpha_2+\beta_2\\ u_y(x_0,y_0) &= -\alpha_2+\beta_2 & v_y(x_0,y_0) &= \alpha_1-\beta_1. \end{aligned}$$

Jelikož $a = \alpha_1 + i\alpha_2,\ b = \beta_1 + i\beta_2$, máme

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}\left(u_x(x_0,y_0) + v_y(x_0,y_0)\right) + \frac{i}{2}\left(-u_y(x_0,y_0) + v_x(x_0,y_0)\right)\\ b &= \frac{1}{2}\left(u_x(x_0,y_0) - v_y(x_0,y_0)\right) + \frac{i}{2}\left(u_y(x_0,y_0) + v_x(x_0,y_0)\right), \end{aligned}$$

a také

$$\begin{aligned} df(z_0)(h) = ah + b\overline{h} &= (\alpha_1+\beta_1)h_1 + (-\alpha_2+\beta_2)h_2 + i\left[(\alpha_2+\beta_2)h_1 + (\alpha_1-\beta_1)h_2\right]\\ &= u_x h_1 + u_y h_2 + i(v_x h_1 + v_y h_2) = du(x_0,y_0)(h_1,h_2) + i\,dv(x_0,y_0)(h_1,h_2). \end{aligned}$$

■

Příklad: Uvažme opět $f(z) = \overline{z}$. Potom $u(x,y) = x$ a $v(x,y) = -y$, takže
$\substack{u_x=1\\ u_y=0}\ \substack{v_x=0\\ v_y=-1}$ a $a = 0$ & $b = 1 \Leftrightarrow$
$df(x_0,y_0)(h_1,h_2) = (1\cdot h_1 + 0\cdot h_2) + i(0\cdot h_1 - 1\cdot h_2) = h_1 - ih_2 = \overline{h}$,
což je zcela v souladu s výsledkem, který jsme dostali pomocí Definice 3.4.

▲

A nyní si ukažme, jak tyto pojmy spolu souvisí a jaká je zde role C–R podmínek.

Věta 3.6

Nechť $D \subseteq \mathbb{C}$ je otevřená množina a $f : D \to \mathbb{C}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.

(i) *Funkce* f *je komplexně diferencovatelná v bodě* $z_0 \in D$.

(ii) *Funkce* f *je reálně diferencovatelná v* z_0 *a totální diferenciál* $df(z_0) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je* $\mathbb{C}$*-lineární.*

(iii) *Funkce* f *je reálně diferencovatelná v* z_0 *a jsou splněny Cauchyho–Riemannovy podmínky.*

Důkaz. Ekvivalence (i)⇔(ii) plyne z (3.1) a Definice 3.4. Platí-li (i), pak f je reálně diferencovatelná a musí platit Cauchyho–Riemannovy podmínky, tj. (iii). Naopak, platí-li (iii), pak z Věty 3.5 plyne, že $T(h)$ je $\mathbb{C}$-lineární (neboť Cauchyho–Riemannovy podmínky znamenají $u_x = v_y$ a $u_y = -v_x$ právě tehdy, když $b = 0$ dle Věty 3.5), tj. platí (ii). ∎

Příklad: Funkce $f(z) = f(x+iy) = x^3y^2 + ix^2y^3$ je podle Věty 3.5 reálně diferencovatelná v $\mathbb{C}$ (u, v jsou polynomy v $\mathbb{R}^2$). C–R podmínky jsou

$$3x^2y^2 = 3x^2y^2 \qquad \& \qquad 2x^3y = -2xy^3,$$

což platí právě tehdy, když $xy(x^2+y^2) = 0$. Daná funkce je tedy komplexně diferencovatelná právě v bodech na souřadných osách.

▲

Poznámka: Je-li funkce $f = u + iv$ komplexně diferencovatelná v D, pak

$$|f'|^2 = f'\overline{f'} \overset{(3.2)}{=} (u_x + iv_x)(u_x - iv_x) = u_x^2 + v_x^2 \overset{\text{C–R}}{=} u_y^2 + v_y^2 \overset{\text{C–R}}{=} u_x v_y - v_x u_y. \quad (*)$$

Současně v důkazu Věty 3.5 máme

$$du(x,y)(h_1,h_2) = u_x h_1 + u_y h_2 \overset{\text{C–R}}{=} v_y h_1 - v_x h_2$$
$$dv(x,y)(h_1,h_2) = v_x h_1 + v_y h_2 \overset{\text{C–R}}{=} -u_y h_1 + u_x h_2,$$

z čehož plyne

$$\begin{pmatrix} du(x,y)(h_1,h_2) \\ dv(x,y)(h_1,h_2) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ -u_y & u_x \end{pmatrix}}_{\det = u_x^2+u_y^2} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} v_y & -v_x \\ v_x & v_y \end{pmatrix}}_{\det = v_x^2+v_y^2} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}}_{\det = u_x v_y - u_y v_x} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}.$$

V posledním výrazu na pravé straně máme vlastně Jakobiho matici zobrazení $(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$ a diferenciál takové funkce z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ máme popsán jako lineární zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ (tj. $\mathbb{C}$-lineární zobrazení nás vede k lineárnímu zobrazení $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$). Navíc determinant Jakobiho matice je vždy nezáporný díky rovnosti $(*)$ a je kladný pro každé z takové, že $f'(z) \neq 0$.

Zkombinováním Vět 3.5 a 3.6 a postačující podmínky pro diferencovatelnost funkce v $\mathbb{R}^n$ dostaneme následující důsledek.

Důsledek 3.7

Jsou-li funkce $u, v : \widetilde{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ třídy C^1 (tj. spojitě diferencovatelné neboli jsou diferencovatelné se spojitými oběma parciálními derivacemi v $\widetilde{D}$) v otevřené množině $\widetilde{D}$ a jsou-li zde splněny Cauchyho–Riemannovy podmínky, pak funkce $f : D \to \mathbb{C}$ je komplexně diferencovatelná v každém bodě množiny D (což je $\mathbb{C}$-verze množiny $\widetilde{D}$).

Důkaz. Kombinace Vět 3.5 a 3.6 a diferencovatelnost v $\mathbb{R}^2$. ∎

Současně si uvědomme, že existence příslušných parciálních derivací prvního řádu spolu s platností C–R podmínek je pouze nutnou podmínkou, která ještě nezaručuje existenci derivace komplexní funkce (tj. komplexní diferencovatelnost) - proto je v Důsledku 3.7 požadováno více.
Příklad: Pro z=x+iy uvažme

$$f(z) = f(x+iy) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \qquad (*) \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

Funkce f má $v \equiv 0$ a reálná složka se anuluje na obou osách, tj. na množině $\{x+iy, xy = 0\}$. V bodě $z = 0$ jsou splněny C–R podmínky avšak derivace neexistuje, protože funkce $u(x,y)$ není v 0 dokonce ani spojitá (V. 3.5 & 3.6⇒ f musí být reálně diferencovatelná ⇒ u musí být diferencovatelná, a tedy nutně spojitá).
Vskutku,

$$u = \frac{xy}{x^2+y^2}, \text{ pro } xy \neq 0 \;\Rightarrow\; u_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{u(h,0)-u(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$
$$u_y(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{u(0,h)-u(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$
$$v \equiv 0 \;\Rightarrow\; v_y(0,0) = 0 = v_x(0,0)$$

⇒ C–R podmínky jsou splněny. Jenže reálná funkce $u(x,y)$ není diferencovatelná v $[0,0]$, neboť

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{k}{1+k^2} \;\Rightarrow \text{neexistuje}$$

Tedy $u(x,y)$ není spojitá v $[0,0]$, a tudíž ani nemůže být diferencovatelná v $[0,0]$ (neboť diferencovatelnost ⇒ spojitost!).

▲

$(*)$ neboli $\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{1}{4i}\left(\frac{z^2-\bar{z}^2}{|z|^2}\right)$. Volbou $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ & $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ dostaneme

$$f(x+iy) = f(z) = \frac{\frac{z+\bar{z}}{2}\cdot\frac{z-\bar{z}}{2i}}{\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2+\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2} = \frac{\frac{z^2-\bar{z}^2}{4i}}{\frac{z^2+2z\bar{z}+\bar{z}^2}{4}+\frac{z^2-2z\bar{z}+\bar{z}^2}{-4}}$$
$$= \frac{\frac{z^2-\bar{z}^2}{4i}}{\frac{z\bar{z}}{2}+\frac{z\bar{z}}{2}} = \underline{\underline{\frac{1}{4i}\frac{z^2-\bar{z}^2}{z\bar{z}}}}.$$

Příklad: Pro funkci $e^z := e^x \cos y + ie^x \sin y$ máme

$$u(x,y) = e^x \cos y$$
$$v(x,y) = e^x \sin y.$$

Není těžké ověřit spojitost parciálních derivací a platnost C–R podmínek $\forall z \in \mathbb{C}$, tj.

$$u_x = e^x \cos y \qquad v_x = e^x \sin y$$
$$u_y = -e^x \sin y \qquad v_y = e^x \cos y$$

Takže takto definovaná funkce e^z je v $\mathbb{C}$ komplexně diferencovatelná a platí

$$(e^z)' = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z.$$
$$u_x + iv_x$$

▲

Také platí (dle poznámky před Důsledkem 3.7)

$$|(e^z)'|^2 = u_x^2 + u_y^2 = e^{2x}\cos^2 y + e^{2x}\sin^2 y = e^{2x} = e^{2\operatorname{Re} z}.$$

Příklad: Uvažme funkci

$$f(z) := \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + i \arctan\frac{y}{x}.$$

Ta je definovaná pro $x^2 + y^2 \neq 0$ a $x \neq 0$, tj. $D := \mathbb{C}\setminus\{z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} z = 0\}$. Potom

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$$
$$v(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$$

a platí

$$u_x = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2x = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad v_x = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}$$
$$u_y = \frac{y}{x^2+y^2} \qquad v_y = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Vidíme, že parciální derivace existují, jsou spojité na D a splňují zde C–R podmínky, takže funkce f je komplexně diferencovatelná na D a platí

$$f'(z) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{1}{z} \quad \forall z \in D.$$

f je komplexní logaritmus?

Ovšem *ne všechny* reálné (spojitě) diferencovatelné funkce dvou proměnných mohou figurovat jako reálné nebo komplexní části komplexně diferencovatelných funkcí. C–R podmínky totiž představují značné omezení. Předpokládejme, že $f = u + iv$ je v $D \subseteq \mathbb{C}$ komplexně diferencovatelná a že funkce u, v mají spojité parciální derivace 2. řádu v D. Pak z C–R podmínek dostaneme

$$u_{xx} + u_{yy} = (v_y)_x + (-v_x)_y = v_{yx} - v_{xy} \overset{(*)}{=} 0.$$

a

$$v_{xx} + v_{yy} = (-u_y)_x + (u_x)_y = -u_{yx} + u_{xy} \overset{(*)}{=} 0$$

[$(*)$–spojitost 2. derivací $\rightarrow$ Youngova věta]
Tedy u, v jsou řešením tzv. Laplaceovy rovnice

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0, \qquad \text{kde } g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

Funkce, které na množině D splňují Laplaceovu rovnici, se nazývají harmonické. Tedy reálná a imaginární část komplexně diferencovatelných funkcí *musí být* harmonické, přičemž předpoklad spojitosti parciálních derivací 2. řádu je nadbytečný, neboť později (Důsledek 7.7) uvidíme, že komplexně diferencovatelné funkce v D mají v D derivace všech řádů, což implikuje spojitost parciálních derivací všech řádů funkcí u a v (a tedy i harmonických funkcí, tj harmonické funkce $\in \mathbb{C}^\infty$).
Toto také dává velmi jednoduchý návod, jak najít harmonické funkce. Funkce $f_1(z) = z^2$, $f_2(z) = z^3$, $f_3(z) = e^z$ (jak definováno dříve) a $f_4(z) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + i \arctan \frac{y}{x}$ jsou komplexně diferencovatelné na $\mathbb{C}, \mathbb{C}, \mathbb{C}$ a D, takže máme např. harmonické funkce $\operatorname{Re} f_1(z) = 2xy$, $\operatorname{Re} f_2(z) = x^3 - 3xy^2$, $\operatorname{Im} f_3(z) = e^x \sin y$ a $\operatorname{Re} f_4(z) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$ na $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2 \setminus \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, x = 0\}$.
Naopak, funkce $x^2 + y^2 = |z|^2$ není harmonická ($\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 2 + 2 = 4 \neq 0$, takže není reálnou částí žádné komplexně diferencovatelné funkce:

$$\begin{aligned} &f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2 : \\ &u(x, y) = x^2 + y^2 \qquad v(x, y) = 0 \\ &u_x = 2x \qquad\qquad\quad v_x = 0 \\ &u_y = 2y \qquad\qquad\quad v_y = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ C–R platí pouze v bodě $z = 0 \rightsquigarrow$ zde je komplexně diferencovatelná neboť

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|^2 - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\overline{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \overline{h} = 0 \surd$$

a v takovém případě je $u = 0$, tj, součást nulové funkce $\rightsquigarrow$ triviální.
A opravdu neexistuje $v \not\equiv 0$, pro kterou by $f = u + iv = |z|^2$ byla diferencovatelná?

Platí

$$\begin{gathered}
u_x = 2x \quad \& \quad u_y = 2y \\
\Downarrow \text{-C–R} \\
v_y = 2x \quad \& \quad v_x = -2y \\
\Downarrow \text{-}v \text{ je nutně tvaru} \\
v = \int 2x\,dy + \varphi(x) \quad \Rightarrow \quad v = 2xy + \varphi(x) \\
\downarrow \tfrac{\partial}{\partial x} \\
-2y = v_x = 2y + \varphi'(x) \\
\Downarrow \\
\varphi'(x) = -4y \; \lightning
\end{gathered}$$

Neboť $\varphi(\cdot)$ musí být funkce závislá pouze na x! (toto je důsledek "neharmoničnosti" funkce u)

Je-li $u(x,y)$ "harmonický polynom" v $\mathbb{R}^2$, pak funkce $f(z) \coloneqq \partial u(\frac{1}{2}z, \frac{1}{2i}z) - u(0,0)$ je komplexní polynom (tj. komplexně diferencovatelná funkce) s reálnou částí $u(x,y)$. (tzv. Milneho–Thomsonova metoda).
Ještě zmiňme, že harmonické funkce hrají v klasické matematice významnou roli.

Ale co obrácená otázka: Je každá harmonická funkce reálnou/imaginární částí nějaké komplexně diferencovatelné funkce? Samozřejmě předchozí patologický příklad nám naznačuje, že bychom se měli věnovat pouze situaci, kdy spojení mezi harmonickými a komplexně diferencovatelnými funkcemi "funguje" na nějaké netriviální množině (tj. ne jednobodové apod.). To nás přivádí k jednomu z nejdůležitějších pojmů v komplexní analýze. Ale nejdříve ještě malá odbočka.

Je-li funkce f reálně diferencovatelná v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$, pak definujeme také parciální derivace vzhledem k x, y, z a $\bar{z}$ jako

$$\begin{aligned}
f_x(z_0) &\coloneqq u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0) = f'(z_0), \\
f_y(z_0) &\coloneqq u_y(x_0,y_0) + iv_y(x_0,y_0) = -if'(z_0), \\
f_z(z_0) &\coloneqq \tfrac{1}{2}[f_x(z_0) - if_y(z_0)], \\
f_{\bar{z}}(z_0) &\coloneqq \tfrac{1}{2}[f_x(z_0) + if_y(z_0)].
\end{aligned}$$

Definice f_x a f_y jsou zcela přirozené, neboť $f = u + iv$.
Jelikož funkce je reálně diferencovatelná, existuje $T(h) = ah + b\overline{h}$ takové, že

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0) - T(h)}{h} = 0.$$

Z volby $h = 1$ tj. $\mathbb{R}^2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ a $h = i$ tj. $\mathbb{R}^2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ dostaneme

$$\begin{aligned}
f_x &= T(1) = a + b, \\
f_y &= T(i) = ai - ib,
\end{aligned}$$

a naopak

$$a = \frac{1}{2}\left[T(1) - iT(i)\right], \quad \leftarrow T(1)-iT(i)=a+b-i(ai-bi)=a+a+b-b=2a$$
$$b = \frac{1}{2}\left[T(1) + iT(i)\right]. \quad \leftarrow T(1)+iT(i)=a+b+i(ai-bi)=a-a+b+b=2b$$

Také f_z a $f_{\bar z}$ jsou definovány naprosto přirozeně, neboť

$$f(z) = f(x+iy) \cong f(x,y) = f\left(\frac{1}{2}(z+\bar z), \frac{1}{2i}(z-\bar z)\right),$$

a bereme-li z a $\bar z$ jako nezávislé proměnné, dostaneme z pravidla pro derivování složené funkce

$$f_z(z_0) = f_x(z_0)\cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{\swarrow \frac{\partial x}{\partial z}} + f_y(z_0)\cdot \underbrace{\left(-\frac{i}{2}\right)}_{\swarrow \frac{\partial y}{\partial z}=\frac{1}{2i}=-\frac{i}{2}},$$
$$f_{\bar z}(z_0) = f_x(z_0)\cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{\swarrow \frac{\partial x}{\partial \bar z}} + f_y(z_0)\cdot \underbrace{\frac{i}{2}}_{\swarrow \frac{\partial y}{\partial \bar z}=-\frac{1}{2i}=\frac{i}{2}}.$$

Navíc platí (z definice s "trochou" námahy) "inverzní vzorce" pro parciální derivace

$$\overline{f_x}(z_0) = \overline{f_x(z_0)}, \quad \overline{f_y}(z_0) = \overline{f_y(z_0)},$$
$$u_x(z_0) = \frac{1}{2}\left[f_x(z_0) + \overline{f_x}(z_0)\right], \quad u_y(z_0) = \frac{1}{2}\left[f_y(z_0) + \overline{f_y}(z_0)\right],$$
$$v_x(z_0) = \frac{1}{2i}\left[f_x(z_0) - \overline{f_x}(z_0)\right], \quad v_y(z_0) = \frac{1}{2i}\left[f_y(z_0) - \overline{f_y}(z_0)\right],$$
$$f_x(z_0) = f_z(z_0) + f_{\bar z}(z_0), \quad f_y(z_0) = i\left[f_z(z_0) - f_{\bar z}(z_0)\right].$$

Potom C–R podmínky lze psát jako

i) $f_{\bar z}(z_0) = 0$ (tj. C–R platí, pokud f "nezávisí" na $\bar z$!!) nebo

ii) $f_z(z_0) = f_x(z_0)$ nebo

iii) $if_x(z_0) = f_y(z_0)$.

Důkaz.

i) $f_{\bar z}(z_0) = 0$

$$\frac{1}{2}(u_x + iv_x) + \frac{i}{2}(u_y + iv_y) = \frac{1}{2}(u_x - v_y) + \frac{i}{2}(v_x + iu_y) = 0 \overset{\text{porovnáním reálné a imaginární části platí C–R}}{\Leftrightarrow}$$

ii) $f_z(z_0) = f_x(z_0)$

$$\frac{1}{2}(f_x - if_y) = f_x \;\Leftrightarrow\; -\frac{1}{2}(f_x + if_y) = 0 \;\Leftrightarrow\; -f_{\bar z}(z_0) = 0 \;\Leftrightarrow\; \text{C–R dle (i)}$$

iii) $if_x(z_0) = f_y(z_0)$

$$\Leftrightarrow\; if_x(z_0) - f_y(z_0) = 0 \;\Leftrightarrow\; i(f_x(z_0) + if_y(z_0)) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2if_{\bar z}(z_0) = 0 \;\Leftrightarrow\; \text{C–R dle (i)}.$$

■

Zejména tedy platí následující tvrzení (dle předchozí rovnosti a Věty 3.6)

Věta 3.8

Nechť $D \subseteq \mathbb{C}$ je otevřená množina. Pak reálně diferencovatelná funkce $f : D \to \mathbb{C}$ je komplexně diferencovatelná v bodě $z_0 \in D$ právě tehdy, když

$$f_{\bar{z}}(z_0) = 0.$$

V takovém případě platí $f'(z_0) = f_z(z_0)$. Podobně $\bar{f}$ je komplexně diferencovatelná právě tehdy, když $f_z(z_0) = 0$, a v takovém případě platí $\bar{f}'(z_0) = f_{\bar{z}}(z_0)$.

Důkaz. Cauchyho–Riemannovy podmínky jsou právě $f_{\bar{z}}(z_0) = 0$. ∎

Poznamenejme ještě, že

$$\overline{f_z(z_0)} \neq \overline{f}_z(z_0), \qquad \overline{f_{\bar{z}}(z_0)} \neq \overline{f}_{\bar{z}}(z_0),$$

avšak platí

$$\overline{f_z(z_0)} = \overline{f}_{\bar{z}}(z_0) \quad \text{a} \quad \overline{f_{\bar{z}}(z_0)} = \overline{f}_z(z_0).$$

Důkaz. Podle definice

$$\overline{f_z(z_0)} = \frac{1}{2}(\overline{f_x} + i\overline{f_y}) = \overline{f}_{\bar{z}}(z_0),$$
$$\overline{f}_z(z_0) = \frac{1}{2}(\overline{f_x} - i\overline{f_y}) = \overline{f_{\bar{z}}(z_0)}.$$

∎

Nyní se již dostáváme k jednomu ze základních stavebních kamenů v teorii komplexních funkcí.

Definice 3.9

Řekneme, že funkce f je *holomorfní v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$*, jestliže existuje okolí bodu z_0, v jehož každém bodě je funkce f komplexně diferencovatelná. Řekneme, že f je *holomorfní na množině $M \subseteq \mathbb{C}$*, je-li holomorfní v každém bodě $z \in M$.

Historická poznámka: Počátky studia samotných holomorfních funkcí jdou ke Cauchyho práci z roku 1814 věnované integrálnímu počtu v $\mathbb{C}$. Do té doby byla věnována pozornost bohatému dědictví po Eulerově éře s mnoha speciálními funkcemi. Nicméně Cauchy rozhodně neplánoval položení základů obecné teorie komplexně diferencovatelných funkcí. Slovo "holomorfní" bylo zavedeno Briotem & Bouquetem ve druhém vydaní jejich knihy v roce 1875. V prvním vydání bylo použito označení "synektická", což pochází od Cauchyho. Ve starší literatuře lze také najít označení jako monogenní, monodromická, analytická, regulární či (v jistém speciálním smyslu také) integrovatelná. Tato a jiná další označení popisují jisté vlastnosti např. nulový integrál pro každou uzavřenou křivku nebo lokální existenci rozvoje do mocninné řady nebo platnost C–R podmínek apod., a tedy původně nebyly považovány za synonyma. Avšak když rozvoj teorie komplexně diferencovatelných funkcí dosáhl jisté úrovně, ukázalo se, že tyto označení jsou ekvivalentní (a my se o tom také přesvědčíme). Proto většina těchto pojmů upadla postupně v zapomnění - nicméně pojem "analytická" se ještě stále v tomto kontextu používá. Ještě v roku 1851 neměl Cauchy přesnou definici třídy funkcí, pro kterou jím budovaná teorie platí: "Teorie funkcí imaginární proměnné

nastolují delikátní otázky, které bylo nutné vyřešit..."- takto začíná jeho zpráva Comptes Rendus z 10. února 1851.

Vánicí jde zimní poutník,
vločky sněhu stopy kradou,
když je funkce holomorfní,
jde vyjádřit řadou.

(Báseň od J. Frýdka)

Pro rozšíření Definice 3.9 na $\widetilde{\mathbb{C}}$ (nicméně komplexní diferencovatelnost definujeme pouze na $\mathbb{C}$) použijeme obvyklý trik:
funkce f je holomorfní v bodě $z_0 = \infty \Leftrightarrow$ funkce $f(\frac{1}{z})$ je holomorfní v bodě $z_0 = 0$.
Zatímco komplexní derivace a diferencovatelnost v $\mathbb{R}^2$ jsou "bodové pojmy", funkce je vždy holomorfní na otevřené množině. Z Věty 3.3 s pravidly pro komplexní derivace ihned dostaneme následující tvrzení s očekávanými vlastnostmi holomorfních funkcí.

Věta 3.10

Nechť funkce f, g jsou holomorfní v bodě z_0. Pak také funkce $f \pm g$, $f \cdot g$ a f/g (je-li $g(z_0) \neq 0$) jsou holomorfní v z_0.

Důkaz. Zřejmé. ∎

Pro další výklad budeme potřebovat si ujasnit/připomenout pár pojmů.

Oblast Ω:= otevřená $\overbrace{\text{souvislá}}^{(*)}$ množina.

$(*)$: Souvislá množina v metrickém prostoru = není sjednocením žádných dvou neprázdných disjunktních otevřených podmnožin v metrickém prostoru (pro nás $\mathbb{C}$ vs. $\mathbb{R}^2$)$\Leftrightarrow$ libovolné dva body v souvislé množině lze spojit lomenou čárou ležící v této množině
$\widetilde{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{C}\backslash\{0\}$ jsou souvislé $\Rightarrow$ jedinými množinami otevřenými a uzavřenými současně jsou $\widetilde{\mathbb{C}}$ a $\varnothing$.
Příklady oblastí: $\widetilde{\mathbb{C}}, \varnothing, \mathbb{C}, \mathbb{C}\backslash\{0\}$, jednobodové množiny, interval (i nekonečný), kruhová a prstencová (ryzí) okolí, mezikruží,...
Uzavřená souvislá množina =: kontinuum

Stupeň souvislosti: oblast $\Omega \subseteq \widetilde{\mathbb{C}}$ je

- jednoduše souvislá $\Leftrightarrow \widetilde{\mathbb{C}}\backslash\Omega$ je souvislá
- n-násobně souvislá ($n \in \mathbb{N}\backslash\{1\} \Leftrightarrow$ množina $\widetilde{\mathbb{C}}\backslash\Omega$ má právě n souvislých komponent
- nekonečněnásobně souvislá $\Leftrightarrow$ množina $\widetilde{\mathbb{C}}\backslash\Omega$ má nekonečně mnoho souvislých komponent

Oblast, která není jednoduše souvislá = několikanásobně nebo vícenásobně souvislá oblast.

Příklad:

a) $\{z \in \mathbb{C},\ |z-1| + |z+2i| < 4\}$ (vnitřek elipsy s ohnisky v 1 a -2i) je 1-souvislá oblast

b) $\{z \in \mathbb{C},\ 1 < |z < 3\}| \ldots$ 2-souvislá oblast (mezikruží)

c) $\{z \in \mathbb{C},\ 1 < |z| < 10,\ |z-4| > 1,\ |z+5| > 2,\ |z-3i| > 1\}$ 5-souvislá oblast (máme 5 "děr")

d) $\mathbb{C}$, $\widetilde{\mathbb{C}}$ 1-souvislá, $\mathbb{C}\backslash\{z_0\}$ je 2-souvislá, $\widetilde{\mathbb{C}}\backslash\{z_0\}$ je 1-souvislá oblast

e) $\Omega = \{z \in \mathbb{C},\ \alpha < \operatorname{Re} z < \beta\},\ \alpha < 0 < \beta$ je 1-souvislá oblast

f) $\Omega_f = \{z \in \mathbb{C},\ \alpha < \operatorname{Re} z < \beta\} \cup \{z \in \mathbb{C},\ |z| > \gamma\},\ \alpha < 0 < \beta,\ \max\{|\alpha|, |\beta|\} < \gamma < \infty$ je 3-souvislá oblast

g) $\Omega = \Omega_f \cup \{\infty\}$ je 2-souvislá oblast

h) $\mathbb{C}\backslash \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \overline{K(k,r)}$ pro $r < \frac{1}{2} \ldots \infty$-souvislá množina

Věta 3.11

Nechť $G \subseteq \mathbb{C}$ je oblast. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.

(i) Funkce f je konstantní na G.

(ii) Funkce f je holomorfní a platí $f'(z) = 0$ pro všechna $z \in G$.

Tvrzení lze uvést ještě v obecnější podobě, kdy uvažovaná množina není souvislá, tj. pouze na otevřené množině D. V takovém případě však není funkce f konstantní, ale pouze lokálně konstantní, tj. $\forall z_0 \in D$ existuje okolí $\mathcal{O}(z_0)$ takové, že $\forall z \in \mathcal{O}(z_0)$ platí $f(z) = c$ pro nějaké $c \in \mathbb{C}$.
Předpoklad oblasti pro množinu G umožňuje dokázat implikaci $(ii) \Rightarrow (i)$ pomocí Věty o střední hodnotě pro funkce v $\mathbb{R}^2$.

Věta (o střední hodnotě)
Nech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná funkce v každém bodě úsečky AB, pak na této úsečce existuje bod C (mezi A, B) takový, že

$$f(B) - f(A) = \operatorname{grad} f(c)(B - A).$$

Důsledek: Je-li U oblast a $\operatorname{grad} f(x) = 0\ \forall x \in U$, pak f je konstantní na U.

Důkaz obecnějšího tvrzení není příliš složitý, ale my si jej nyní neukážeme, neboť pro vybudování základů teorie křivkového integrálu v $\mathbb{C}$ budeme mít dostatečné nástroje k tomu, abychom si pravdivost tohoto tvrzení ukázali velmi elegantním a jednoduchým způsobem, viz V.6.17A. A nyní již slibovaný důkaz.

Důkaz. Implikace (i)⇒(ii) je triviální: f je konstantní $\rightsquigarrow$ pro každé $z \in G$ existuje okolí, kde je funkce f konstantní $\rightsquigarrow$ na tomto okolí existuje derivace a je rovna $0 \rightsquigarrow f$ je holomorfní a $f'(z) \equiv 0$ na G.
(ii)⇒(i): Nechť f je holomorfní a $f'(z) = 0$ pro všechna $z \in G$. Pak z rovnosti 3.2 plyne $u_x = u_x = v_x = v_y = 0$ pro všechna $z \in G$. Pak z Věty o střední hodnotě vyplývá, že $u(x,y)$ a $v(x,y)$ jsou konstantní funkce, tj. $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = K_1 + iK_2$, tj. f je konstantní na G. ∎

Věta 3.11 je pro holomorfní funkce velmi důležitá, neboť z ně plyne následující důsledek.

Důsledek 3.12

Nechť funkce f *je holomorfní na oblasti* $G \subseteq \mathbb{C}$. *Pak funkce* f *je konstantní v* G *právě tehdy, když platí některá z podmínek*

(i) $\bar{f}$ *je holomorfní na* G,

(ii) $\operatorname{Re} f$ *je holomorfní na* G,

(iii) $\operatorname{Im} f$ *je holomorfní na* G,

(iv) $f'(z) \equiv 0$ *na* G,

(v) $|f|$ *je konstantní na* G.

Důkaz. Stačí ukázat, že podmínky (i), (ii),... (v) jsou ekvivalentní. Pak totiž tvrzení plyne z věty 3.11, kde jsme ukázali ekvivalenci holomorfnosti f s (iv). Nechť f je holomorfní. Je-li $\bar{f}$ holomorfní, pak $\operatorname{Re} f$ je také holomorfní (neboť $\operatorname{Re} f = (f+\bar{f})/2$), a tedy také $\operatorname{Im} f$ je holomorfní (neboť $\operatorname{Im} f = (f - \operatorname{Re} f)/i$). Je-li $\operatorname{Im} f$ holomorfní, pak $\operatorname{Im} f = u + iv$ s $v \equiv 0$, z čehož díky Cauchyho–Riemannovým podmínkám dostaneme $u_x = v_y = 0$ a $u_y = -v_x = 0$, takže $(\operatorname{Im} f)' \equiv 0$, a tudíž $(\operatorname{Re} f)' \equiv 0$, tj. $f' \equiv 0$. Platí-li (iv), pak podle Věty 3.11 je f konstantní, a tedy také $|f|$ je konstantní na G. Konečně platí-li (v), pak v případě $|f| \equiv 0$ dává $f \equiv 0$ a současně $\bar{f} = f$, takže $\bar{f}$ je holomorfní. Je-li $|f| \equiv K > 0$, pak $f(z) \neq 0$ pro všechna $z \in G$, a tedy $\bar{f} = |f|^2/f$ je holomorfní. ∎

Poznámka:

i) Jsou-li f a $\bar{f}$ současně holomorfní v oblasti $G \overset{\text{(i)}}{\Rightarrow} f$ je konstantní
(tj., je-li f holomorfní & nekonstantní $\Rightarrow \bar{f}$ není holomorfní, tj. komplexní sdruženost "rozbije" holomorfnost).

ii) Podmínka *(ii)*/*(iii)* vlastně říká, že každá holomorfní funkce v oblasti G nabývající zde pouze reálných/ryze imaginárních hodnot je v G konstantní.
Také odtud plyne, že je-li f holomorfní v oblasti G a $\operatorname{Re} f$ nebo $\operatorname{Im} f$ je konstantní $\Rightarrow f$ je konstantní.

iii) Jediná holomorfní funkce f v oblasti G s konstantní velikostí (modulem) je konstantní dle *(v)*.
Totéž platí i v případě funkce s $\arg f(z) = \varphi(z) = \text{konst}$.
$\rightsquigarrow f(z) = |f(z)| \cdot e^{i\varphi(z)} = |f(z)| \cdot e^{i\varphi}$, f je konstantní násobek $|f(z)|$ a $\widetilde{f}(z) = |f(z)|$ je konstantní $\Rightarrow f$ je konstantní.

Ještě jeden velmi důležitý důsledek plyne z Věty 3.11.

Důsledek 3.13

(i) Nechť f, g *jsou holomorfní na oblasti* G. *Je-li* $f' \equiv g'$ *na* G, *pak existuje* $k \in \mathbb{C}$ *takové, že* $g(z) = f(z) + k$ *pro všechna* $z \in G$.

(ii) K tomu, aby holomorfní funkce f byla polynomem stupně menšího než n na oblasti G, je nutné a stačí, aby $f^{(n)}(z) \equiv 0$ na G.

Důkaz. Část (i) plyne ihned z Věty 3.11 aplikované na rozdíl $f - g$. Tvrzení (ii) dokážeme indukcí. Je-li $n = 1$, pak tvrzení plyne z Věty 3.11. Nechť platí pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Je-li f polynomem stupně menšího než $n + 1$, pak zřejmě $f^{(n+1)}(z) = 0$ pro všechna $z \in G$. Naopak, nechť $f^{(n+1)}(z) = 0$ pro všechna $z \in G$, tj. $(f')^{(n)}(z) = 0$ pro všechna $z \in G$. Podle indukčního předpokladu je $f'(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$ pro všechna $z \in G$ a $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. Potom $f'(z) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k+1} z^{k+1}\right)'$ pro všechna $z \in G$. Podle části (i) je $f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k+1} z^{k+1} + q$ pro nějaké $q \in \mathbb{C}$, což znamená, že f je polynomem stupně nejvýše n (tj. menšího než $n + 1$). ∎

Z Věty 3.2 ihned vyplývá, že holomorfní funkce na množině G je spojitá na množině G, tj. máme

$$\underset{\text{konst. f-ce na } G}{\mathbb{C}} \subseteq \underset{\text{holomorfní na } G}{\mathcal{O}(G)} \subseteq \underset{\text{spojité na } G}{\mathcal{C}(G)}$$

A naopak? Je spojitá funkce holomorfní? Obecně samozřejmě ne (viz příklad s $f(z) = \bar{z} \dots$ nediferencovatelná & spojitá). Ovšem platí např.

Tvrzení:
Spojitá funkce $f : D \to \mathbb{C}$ je holomorfní na otevřené množině $D \subseteq \mathbb{C}$ jestliže $\forall z_0 \in G$ existují dvě různé přímky p, q procházející z_0 takové, že limity

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in p}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \qquad \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in q}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existují a jsou si rovny.

Tato věta je známa jako Menchoffova (rok 1935). Speciálně můžeme p, q volit jako přímky rovnoběžné s osami x a y, čímž dostaneme Loomanovu-Menchoffovu větu:

Spojitá funkce $f : D \to \mathbb{C}$ je holomorfní na otevřené množině $D \subseteq \mathbb{C}$, jestliže parciální derivace u_x, u_y, v_x, v_y existují a splňují C-R podmínky na D.

Předchozí věta nevyžaduje diferencovatelnost funkcí u, v nebo spojitost těchto funkcí či jejich derivací. Nicméně z Věty 3.6(iii) a Věty 3.5 ihned vyplývá následující popis holomorfních funkcí.

Věta 3.14

Funkce $f : D \to \mathbb{C}$ je holomorfní na otevřené množině $D \subset \mathbb{C}$ právě tehdy, když obě reálné funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$ jsou diferencovatelné na $\widetilde{D}$ a splňují Cauchyho–Riemannovy podmínky.

Důkaz.
"⇒" Holomorfní na $D \Rightarrow \exists$ okolí $\forall z_0 \in D$ tak, že je komplexně diferencovatelná v okolí $\Rightarrow D$ je otevřená $\Rightarrow f$ je komplexně diferencovatelná $\forall z \in D \Rightarrow$ V.3.6(iii) & V.3.5: u, v jsou diferencovatelné a platí C-R.

"⇐" V.3.5 a V.3.6(iii): f je komplexně diferencovatelná $\forall z_0 \in D \Rightarrow D$ je otevřená: $\forall z_0 \in D$ existuje okolí ležící v $D \Rightarrow f$ je komplexně diferencovatelná v tomto okolí $\Rightarrow f$ je holomorfní. ∎

Věta 3.14 jinými slovy říká: je-li dána diferencovatelná funkce $u = u(x,y)$ na otevřené množině $D \subseteq \mathbb{C}$, pak k tomu, aby existovala funkce f holomorfní na D s $\operatorname{Re} f = u$, je nutné a stačí, aby na D existovala diferencovatelná funkce v splňující C-R podmínky na D. Analogicky také je-li dána funkce $v = \operatorname{Im} f$.

Jenže toto tvrzení neříká nic o tom, zda k dané funkci u bude skutečně možné požadovanou funkci v najít (příp. pro v najít u). Současně připomeňme, že takové funkce musí být harmonické (musí platit C-R), čímž se dostáváme zpět k otázce propojení mezi harmonickými a komplexně diferencovatelnými funkcemi, kterou jsme řešili mezi Důsledkem 3.7 a Větou 3.8, tj. *je každá harmonická funkce v otevřené množině $D \subseteq \mathbb{R}^2$ reálnou nebo imaginární části nějaké holomorfní funkce v D?*
Ještě než odpovíme, máme-li dvě harmonické funkce u, v na $D \subseteq \mathbb{R}^2$, pak
v se nazývá *harmonicky sdružená s* u, jestliže komplexní funkce $u + iv$ je holomorfní na D. Vztah je antisymetrický, neboť $(-i)f = v + i(-u)$ je také holomorfní, tj. v je harmonicky sdružená s $u \Leftrightarrow -u$ je harmonicky sdružená s v.

Tedy naše otázka vlastně pátrá po existenci harmonicky sdružené funkce na otevřené množině D. Jenže odpověď je záporná. Např. funkce

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$$

je harmonická na $\mathbb{R}^2\setminus\{[0,0]\}$ a je reálnou částí funkce $f(z) = \log z = u(x,y) + i\arg z$ (viz kapitolu 5), která je holomorfní např. v $K = \{z \in \mathbb{C},\ |z-1| < 1\}$. Jenže kruh K nelze zvětšit, a proto funkci f nelze holomorfně rozšířit na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. A neexistuje jiná funkce?
Připusťme, že ano, tj. existuje v taková, že $f = u + iv$ a f je holomorfní na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Pak dle C-R podmínek máme

$$u_x = v_y \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2x = \frac{x}{x^2+y^2} = v_y \qquad (*)$$

$$u_y = -v_x \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2y = \frac{y}{x^2+y^2} = -v_x \qquad (**)$$

$$(*)\qquad v = \int \frac{x}{x^2+y^2}\,dy + \varphi(x) = \frac{1}{x}\int \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\,dy + \varphi(x)$$

$$= \frac{1}{x}x\arctan\frac{y}{x} + c + \varphi(x) = \arctan\frac{y}{x} + c + \varphi(x)$$

$$\overset{\frac{\partial}{\partial x}}{\rightsquigarrow}\ v_x = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) + \varphi'(x) = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$(**)\quad v_x = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = 0 \qquad \varphi(x) = D$$

$$\Rightarrow v = \arctan\frac{y}{x} + C$$

Jenže má-li být f holomorfní na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ (stejně jako oblast, kde je u harmonickou), musí být v diferencovatelná na $\mathbb{C}\setminus\{0\} \Rightarrow$ spojitá na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Pak by ale v musela být spojitou také na jednotkové sféře se středem v $z_0 = 0$, tj. $|z| = 1$. Při pohybu z $(1,0)$ do $(0,1)$ proti směru hodinových ručiček

je $\frac{y}{x} \to \infty$, takže ze spojitosti plyne $v(0,1) = \frac{\pi}{2} + C$. Současně při pohybu z $(-1,0)$ do $(0,1)$ po směru hodinových ručiček je $\frac{y}{x} \to -\infty$, takže ze spojitosti plyne $v(0,1) = -\frac{\pi}{2} + C$, což je spor. ↯

Tento příklad tedy ukazuje, že k dané funkci u harmonické na oblasti $G \subseteq \mathbb{R}^2$ obecně nemusí na G existovat harmonicky sdružená funkce (uvedený příklad je asi tím nejčastěji uváděným v této souvislosti). Nicméně situace naštěstí není tak tragická. Následující věta ukazuje, že každá harmonická funkce v otevřené množině je lokálně reálnou (imaginární) částí nějaké holomorfní funkce, tj. pro každý bod existuje okolí, na kterém pro ni existuje harmonicky sdružená funkce (okolí = jednoduše souvislá oblast).
Důkaz věty sice nedává přesný návod, jak takovou funkci zkonstruovat, ale to jsme již vlastně učinili v předchozím příkladu a známe to z řešení exaktních diferenciálních rovnic – jde o kmenovou funkci k totálnímu diferenciálu $-u_y(x,y)\,dx + u_x(x,y)\,dy$.

Věta 3.15

Nechť $G \subseteq \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast a funkce u je harmonická na G. Pak na G existuje harmonicky sdružená funkce v (tj. $f = u + iv$ je holomorfní na G), přičemž tato funkce je určena jednoznačně až na aditivní konstantu.

Všimněte si, že množina $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ v předchozím příkladě není 1-souvislá, takže nám tato věta nemůže zaručit úspěch (a my jsme ukázali, že to ani nelze) – a současně je v souladu s předchozím příkladem, tj. pro $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ máme harmonicky sdruženou funkci v horní a dolní polovině $\mathbb{C}$.

Ukázali jsme, že pro funkci

$$f = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + i(\arctan\frac{y}{x} + c)$$

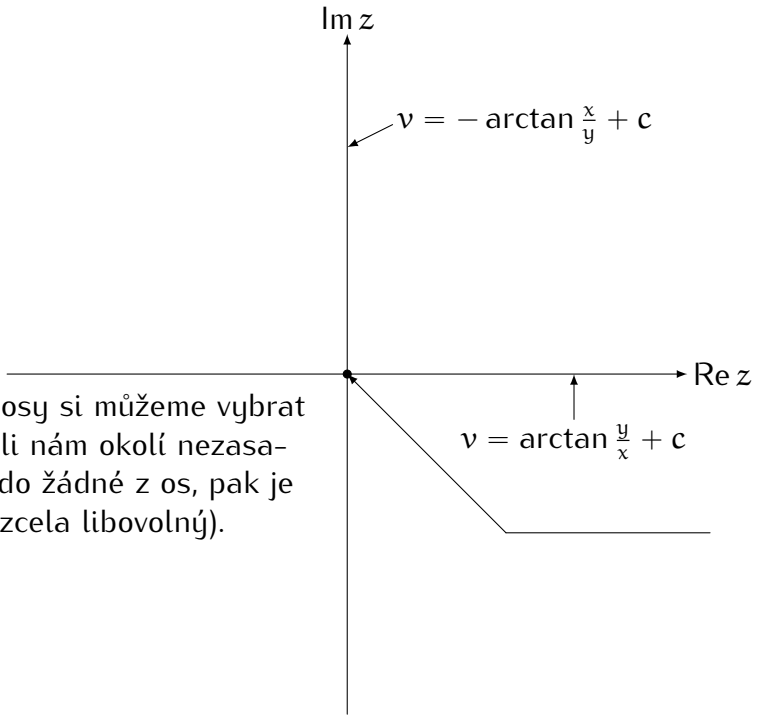
by byl problém s osou $\operatorname{Im} z$, tj. $x = 0$. Funkce v ani není na této ose definovaná. Pak tedy pro body na této ose neexistuje harmonicky sdružená funkce? Ale Věta 3.15 říká, že to musí jít!
"Problém" je totiž ukryt v našem postupu. My jsme vypočetli $v(x,y)$ pomocí

$$\int u_x\,dy + \varphi(x).$$

Lze ale samozřejmě využít i druhou možnost, tj.

$$\begin{aligned}
v(x,y) &= \int (-u_y)\,dx + \psi(y) = -\int \frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \psi(y) = \\
&= -\frac{y}{y^2}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}\,dx + \psi(y) = \left|\begin{array}{c} t = \frac{x}{y} \\ dt = \frac{1}{y}\,dx \end{array}\right| \\
&= -\frac{1}{y}\cdot y\int \frac{1}{t^2+1}\,dt + \psi(y) = -\arctan\frac{x}{y} + \psi(y) \\
\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \quad & v_y = -\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) + \psi'(y) = \frac{x}{x^2+y^2} \\
\rightsquigarrow \quad & \frac{x}{y^2+x^2} + \psi'(y) = \frac{x}{x^2+y^2} \\
\Rightarrow \quad & \psi'(y) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \psi(y) = c \\
\Rightarrow \quad & \underline{-\arctan\frac{x}{y} + c}
\end{aligned}$$

Funkce v pak má "problém" při přechodu přes osu $y = 0$, tj. $\operatorname{Re} z$. Nicméně pro okolí bodů na $\operatorname{Im} z$ (vyjma počátku) to funguje perfektně, tj. celkově máme



Mimo osy si můžeme vybrat (stačí-li nám okolí nezasahující do žádné z os, pak je výběr zcela libovolný).

V počátku nemůžu vybrat nic, neboť libovolné okolí obsahuje body z obou os, takže vždy budeme mít nějaké "problematické" body.

Poznámka: Toto také ukazuje další možnou komplikaci ve výpočtu v pomocí postupu

$$v_1 = \int u_x\,dy + \varphi(x)$$
$$v_2 = -\int u_y\,dy + \psi(y)$$

$\Rightarrow$ porovnáním získáme $\varphi(x)$ nebo $\psi(y)$ v našem případě máme

$$\arctan\frac{y}{x}+\varphi(x)=-\arctan\frac{y}{x}+\psi(y)$$

(platí $\arctan u+\arctan\frac{1}{u}=\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sgn}(u)$), tj. $\varphi(x)-\psi(y)=$konst. $\Rightarrow \varphi=c$ & $\psi=c$, jenže budeme toto vědět vždy?

2. problém: výpočet jednoho z integrálů ($\int u_x$ nebo $\int u_y$) může být velmi komplikovaný.

Důkaz. Nejdříve ukážeme jednoznačnost. Nechť v a $\tilde{v}$ jsou obě harmonicky sdružené s u na G. Pak platí

$$f'=u_x+iv_x \quad\text{a}\quad \tilde{f}'=u_x+i\tilde{v}_x.$$

Jenže z Cauchyho–Riemannových podmínek plyne $f'=u_x-iu_y=u_x-iu_y=\tilde{f}'$, tj. $f'(z)=\tilde{f}'(z)$ pro všechna $z\in G$. Pak z Důsledku 3.13(i) vyplývá $f=\tilde{f}+k$ pro nějaké $k\in\mathbb{C}$. Odtud ale máme

$$u+iv=u+i\tilde{v}+k \quad\text{neboli}\quad i(v-\tilde{v})=k,$$

takže k musí být ryze imaginární číslo, a tedy harmonicky sdružená funkce je nutně jediná až na aditivní konstantu.

A nyní tuto funkci zkonstruujeme. Položme

$$g:=u_x-iu_y.$$

Potom g je spojitá funkce a $\operatorname{Re} g$ a $\operatorname{Im} g$ splňují Cauchyho–Riemannovy podmínky

$$(\operatorname{Re} g)_x=u_{xx}=-u_{yy}=(\operatorname{Im} g)_y \quad\text{a}\quad (\operatorname{Re} g)_y=u_{xy}=u_{yx}=-(\operatorname{Im} g)_x.$$

To ale znamená, že g je holomorfní (viz Věta 3.14). Jelikož g je holomorfní na G a G je jednoduše souvislá množina, plyne z Důsledku 7.2 (důkaz kruhem?!) existence primitivní funkce h na G. Nechť $h=\tilde{u}+i\tilde{v}$. Potom

$$g=h'=\tilde{u}_x+i\tilde{v}_x=\tilde{u}_x-i\tilde{u}_y.$$

Jenže současně $\operatorname{Re} g=u_x$, takže $u_x=\tilde{u}_x$. Proto $u(x,y)=\tilde{u}(x,y)+c(y)$ pro nějakou funkci c závislou pouze na y. Současně $\operatorname{Im} g=-u_y$, takže $u_y=-\tilde{u}_y$, a tedy $u(x,y)=\tilde{u}(x,y)+c(x)$ pro nějakou funkci c závislou pouze na x. To ale znamená, že

$$\tilde{u}(x,y)+c(y)=\tilde{u}(x,y)+c(x) \quad\text{neboli}\quad c(y)=c(x),$$

tj. $c(x)=c(y)=c$ musí být konstantní funkce. Potom $u(x,y)=\tilde{u}(x,y)+c$. Jenže v takovém případě je funkce $f=h+c$ holomorfní s reálnou částí rovnou funkci u. ∎

Poznámka: Funkce g použitá v důkazu Věty 3.15 je vlastně derivace funkce f (což asi není úplně překvapivé), neboť musí platit

$$f'=u_x+iv_x\overset{\text{C–R}}{=}v_y-iu_y.$$

Současně to ukazuje, že je-li u harmonická v G, pak u_x je reálnou částí funkce holomorfní v G, a to ať už G je 1-souvislá nebo nikoli.

4. Funkční a mocninné řady v $\mathbb{C}$

5. Elementární funkce

Nyní, když jsi věci znalá,
netvař se, že spolklas chrousta,
komplexní exponenciála
přece není funkce prostá.

(Báseň od J. Frýdka)

6. Integrál, křivkový integrál a primitivní funkce

Definice 6.1

Křivkou v $\mathbb{C}$ rozumíme spojité zobrazení $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, kde $[\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$ je netriviální kompaktní interval. V takovém případě je křivka *parametrizována vzhledem k* $[\alpha, \beta]$ a nezávislou proměnnou v zobrazení γ nazýváme *parametrem*. Množina $[\gamma] := \gamma([\alpha, \beta])$ se nazývá *graf* (geometrický obraz) křivky γ. Body $\gamma(\alpha)$ a $\gamma(\beta)$ jsou *krajní body* křivky γ, přičemž $\gamma(\alpha)$ je *počáteční bod* a bod $\gamma(\beta)$ je *koncový bod*. Je-li $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$, hovoříme o *uzavřené křivce*.

Definice 6.2

Derivací křivky $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ rozumíme $\gamma'(t)$ pro $t \in (\alpha, \beta)$ a $\gamma'_+(\alpha)$, $\gamma'_-(\beta)$ v krajních bodech (tj. příslušné jednostranné derivace). Křivka γ se pak nazývá *hladká*, má-li spojitou od nuly různou derivaci na $[\alpha, \beta]$, tj. $\gamma' \in C^1[\alpha, \beta]$ a $\gamma'(t) \neq 0$ na $[\alpha, \beta]$. Křivka γ se nazývá *po částech hladká*, existuje-li dělení $D : \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$ intervalu $[\alpha, \beta]$ takové, že křivka $\gamma_k := \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ je hladká pro $k = 1, \ldots, n$. Je-li derivace křivky γ pouze spojitá, hovoříme o *regulární křivce*. Existuje-li dělení $D : \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$ takové, že křivka γ_k je regulární, řekneme, že γ je *po částech regulární* neboli *cesta*.

Definice 6.3

Křivka $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ se nazývá *jednoduchá*, jestliže pro každá dvě čísla $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$ splňující $0 < |t_1 - t_2| < \beta - \alpha$ platí $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$. Je-li navíc $\gamma(\alpha) \neq \gamma(\beta)$, hovoříme o *oblouku*, zatímco pro $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ máme *Jordanovu křivku*.

Je-li $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ Jordanovou křivkou, potom ji nazveme *kladně orientovanou*, jestliže při spojité změně parametru t od α k hodnotě β probíhá $\gamma(t)$ graf $[\gamma]$ proti směru hodinových ručiček, tj. tak, že "vnitřek" γ máme po levé ruce. V opačném případě je křivka γ *orientována záporně*.

Definice 6.4

Opačně orientovanou (*opačnou*) *křivkou* ke křivce $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ $\dot{-}\gamma : [-\beta, -\alpha] \to \mathbb{C}$ definovanou vztahem $\dot{-}\gamma(t) := \gamma(-t)$ pro $t \in [-\beta, -\alpha]$.

Definice 6.5

Součtem křivek $\gamma_1 : [\alpha_1, \beta_1] \to \mathbb{C}$ a $\gamma_2 : [\alpha_2, \beta_2] \to \mathbb{C}$, které splňují $\gamma_1(\beta_1) = \gamma_2(\alpha_2)$, rozumíme křivku $\gamma_1 \dot{+} \gamma_2 : [\alpha_1, \beta_1 + \beta_2 - \alpha_2] \to \mathbb{C}$ danou vztahem

$$(\gamma_1 \dot{+} \gamma_2)(t) := \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [\alpha_1, \beta_1], \\ \gamma_2(t + \alpha_2 - \beta_1), & t \in [\beta_1, \beta_1 + \beta_2 - \alpha_2]. \end{cases}$$

Věta 6.6 (*Jordanova*)

Nechť $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je Jordanova křivka. Potom $\widetilde{\mathbb{C}} \setminus [\gamma] = G_1 \cup G_2$, kde G_1 a G_2 jsou dvě disjunktní jednoduše souvislé oblasti, jejíž společnou hranicí je $[\gamma]$.

Nechť je dána funkce $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Jsou-li reálné funkce $\operatorname{Re} g(t)$ a $\operatorname{Im} g(t)$ integrovatelné na $[\alpha, \beta]$, potom

$$\int_\alpha^\beta g(t)\,dt := \int_\alpha^\beta \operatorname{Re} g(t)\,dt + i \int_\alpha^\beta \operatorname{Im} g(t)\,dt.$$

Věta 6.7

Nechť $g[\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je spojitá. Potom pro funkci $G(t) := \int_{t_0}^t g(s)\,ds$, kde $t, t_0 \in [\alpha, \beta]$, platí $G'(t) = g(t)$. Naopak, jestliže pro funkce $G : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ platí $G'(t) = g(t)$ pro každé $t \in [\alpha, \beta]$, pak $\int_{t_0}^t g(s)\,ds = G(t) - G(t_0)$ pro libovolné $t, t_0 \in [\alpha, \beta]$.

Důkaz. Viz integrální počet v $\mathbb{R}$. ∎

Funkce G je *primitivní* k funkci g.

Věta 6.8 (*substituční pravidlo*)

Je-li funkce $\gamma : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ spojitě diferencovatelná, pak pro spojitou funkci $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ platí

$$\int_\alpha^\beta g(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_{\gamma(\alpha)}^{\gamma(\beta)} g(s)\,ds.$$

Důkaz. Přímý výpočet jako v $\mathbb{R}$. ∎

Věta 6.9 (*metoda per-partes*)

Pro spojitě diferencovatelné funkce $g, h : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ platí

$$\int_\alpha^\beta g(t)\,h'(t)\,dt = \big[g(t)\,h(t)\big]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta g'(t)\,h(t)\,dt.$$

Důkaz. Přímý výpočet jako v $\mathbb{R}$. ∎

Věta 6.10

Nechť $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ *je spojitá funkce. Potom*

$$\left| \int_\alpha^\beta g(t)\,dt \right| \leqslant \int_\alpha^\beta |g(t)|\,dt.$$

Důkaz. Přímý výpočet jako v $\mathbb{R}$. ∎

Délka $L(\gamma)$ cesty $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je

$$L(\gamma) := \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|\,dt = \int_\alpha^\beta \left[\big(\gamma_1(t)\big)^2 + \big(\gamma_2(t)\big)^2 \right]^{1/2} dt,$$

kde $\gamma_1(t) := \operatorname{Re}\gamma(t)$ a $\gamma_2(t) := \operatorname{Im}\gamma(t)$. Potom z Věty 6.10 (nečekaně) plyne

$$L(\gamma) \geqslant \left| \int_\alpha^\beta \gamma'(t)\,dt \right| = |\gamma(\beta) - \gamma(\alpha)|.$$

Definice 6.11

Nechť $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je cesta a $f : [\gamma] \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce. *Křivkový integrál* $\int_\gamma f(z)\,dz$ *funkce* f *po cestě* γ definujeme vztahem

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$

Vzhledem k propojení $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}^2$ se nabízí zcela přirozená otázka: souvisí $\int_\gamma f(t)\,dz$ nějak s křivkovým integrálem v $\mathbb{R}^2$?

Definice 6.12

Nechť $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je daná křivka a $\omega : [\alpha_0, \beta_0] \to [\alpha, \beta]$ je spojitě diferencovatelné a surjektivní zobrazení takové, že $\omega'(\tau) > 0$ pro všechna $\tau \in [\alpha_0, \beta_0]$. Pak křivka $\gamma \circ \omega : [\alpha_0, \beta_0] \to \mathbb{C}$ se nazývá *reparametrizací křivky* γ.

Věta 6.13 (*o nezávislosti na parametrizaci*)

Nechť γ *je daná cesta,* γ_1 *její reparametrizace a funkce* $f : [\gamma] \to \mathbb{C}$ *spojitá. Potom*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz.$$

Důkaz. Nechť $\gamma_1 : [\alpha_0, \beta_0] \to \mathbb{C}$ je reparametrizace cesty $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, tj. $\gamma_1 = \gamma \circ \omega$. Potom platí

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)\,dt \overset{\text{Věta } 3.3}{=} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f(\gamma(\omega(t)))\gamma'(\omega(t))\,\omega'(t)\,dt =$$
$$\overset{\text{Věta } 6.8}{=} \int_{\omega(\alpha_0)}^{\omega(\beta_0)} f(\gamma(s))\gamma'(s)\,ds = \int_\gamma f(z)\,dz,$$

neboť $\alpha = \omega(\alpha_0)$ a $\beta = \omega(\beta_0)$. ∎

Definice 6.14

Dvě křivky $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ a $\widetilde{\gamma} : [\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}] \to \mathbb{C}$ se nazývají *ekvivalentní*, jestliže existuje spojitě diferencovatelné a surjektivní zobrazení $\omega : [\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}] \to [\alpha, \beta]$ takové, že $\omega'(\tau) > 0$ pro všechna $\tau \in [\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]$ a $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \omega$. Ekvivalentní cesty se značí $\gamma \sim \widetilde{\gamma}$.

Věta 6.15

Nechť $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ jsou cesty v $\mathbb{C}$ takové, že koncový bod γ_1 je počátečním bodem γ_2.

(i) Jsou-li $f, g : [\gamma] \to \mathbb{C}$ spojité a $c \in \mathbb{C}$ libovolné, pak platí

$$\int_\gamma [f(z) \pm g(z)]\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz \pm \int_\gamma g(z)\,dz,$$
$$\int_\gamma cf(z)\,dz = c\int_\gamma f(z)\,dz, \qquad \int_{\dot{-}\gamma} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz.$$

(ii) Je-li $f : [\gamma_1 \dot{+} \gamma_2] \to \mathbb{C}$ spojitá, potom

$$\int_{\gamma_1 \dot{+} \gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

Důkaz. Ne. ∎

Platí odhad

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leqslant \sup_{z\in[\gamma]} |f(z)|\, L(\gamma) = \|f\|_\gamma L(\gamma), \tag{6.1}$$

kde

$$\|f\|_\gamma := \max\{|f(\gamma(t))| \mid t \in [\alpha, \beta]\}.$$

Nechť $f : D \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce na otevřené množině $D \subseteq \mathbb{C}$. Pak řekneme, že $\int_\gamma f(z)\,dz$ *nezávisí v D na integrační cestě*, pokud

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

pro každé dvě cesty γ_1, γ_2 ležící v D a mající stejný počáteční i koncový bod.

Věta 6.16

Je-li $D \subseteq \mathbb{C}$ otevřená množina a funkce $f : D \to \mathbb{C}$ spojitá, pak jsou následující tvrzení o funkci $F : D \to \mathbb{C}$ ekvivalentní.

(i) Funkce f je holomorfní v D a platí $F'(z) = f(z)$ pro každé $z \in D$.

(ii) Pro každou dvojici $z, w \in D$ a každou cestu v D s počátečním bodem w a koncovým bodem z platí

$$\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = F(z) - F(w),$$

tj. integrál nezávisí v D *na integrační cestě.*

Důkaz. (i)⇒(ii): Nechť F je holomorfní v D a platí zde $F'(z) = f(z)$. Nechť dále $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je libovolná cesta v D s počátečním bodem w a koncovým bodem z. Potom

$$\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_\alpha^\beta F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt =$$
$$= \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}\big[F(\gamma(t))\big]\,dt \overset{\text{Věta } 6.7}{=} F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha)) = F(z) - F(w).$$

(ii)⇒(i): Nechť je křivkový integrál $\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta$ nezávislý na integrační cestě. Ukážeme, že v každém bodě $z \in D$ existuje derivace $F'(z)$ a je rovna $f(z)$, což vzhledem k otevřenosti D zaručuje platnost (i). Nechť tedy $z_0 \in D$ je libovolné a $r > 0$ takové, že $\overline{K(z_0, r)} \subset D$. Potom dle předpokládané platnosti (ii) máme

$$F(z) = F(z_0) + \int_{\gamma_z} f(\zeta)\,d\zeta \quad \text{pro každé } z \in K(z_0, r), \tag{$*$}$$

kde $\gamma_z(t) := z_0 + (z - z_0)t$, $t \in [0, 1]$, je úsečka s počátečním bodem z_0 a koncovým bodem z. Položme

$$F_1(z) := \begin{cases} \frac{1}{z - z_0}\int_{\gamma_z} f(\zeta)\,d\zeta, & z \in K(z_0, r)\setminus\{z_0\}, \\ f(z_0), & z = z_0. \end{cases}$$

Potom podle ($*$) máme

$$F(z) = F(z_0) + (z - z_0)F_1(z) \quad \text{pro každé } z \in K(z_0, r).$$

Jestliže $F_1(z)$ je spojitá, potom

$$F'(z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0}\frac{(z - z_0)F_1(z)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} F_1(z) = F_1(z_0) = f(z_0)$$

a důkaz je hotov. Proto se nyní podíváme na spojitost funkce F_1 v bodě z_1. Pro $z \in K(z_0, r)\setminus\{z_0\}$ platí

$$\int_{\gamma_z} f(z_0)\,d\zeta = f(z_0)\int_{\gamma_z} d\zeta = f(z_0)\int_0^1 1\,(z - z_0)\,dt = F_1(z_0)\,(z - z_0), \tag{$**$}$$

a tedy máme

$$F_1(z) - F_1(z_0) \overset{(**)}{=} \frac{1}{z - z_0}\int_{\gamma_z} f(\zeta)\,d\zeta - \frac{1}{z - z_0}\int_{\gamma_z} f(z_0)\,d\zeta = \frac{1}{z - z_0}\int_{\gamma_z}\big[f(\zeta) - f(z_0)\big]\,d\zeta.$$

Odtud ale s využitím nerovnosti (6.1) dostaneme pro každé $z \in K(z_0, r)$ odhad

$$|F_1(z) - F_1(z_0)| \overset{(6.1)}{\leqslant} \frac{1}{|z - z_0|}\max_{\zeta\in[\gamma_z]}|f(\zeta) - f(z)|\cdot|z - z_0| = \max_{\zeta\in[\gamma_z]}|f(\zeta) - f(z)|\,.$$

Ovšem funkce f je spojitá na D, a tedy jistě i v bodě z_0, tj. pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $|f(\zeta) - f(z_0)| < \varepsilon$ pro všechna $\zeta \in \mathcal{O}_\delta(z_0)$. Potom ale jistě pro libovolnou úsečku s počátečním bodem z_0 a koncovým bodem $z \in \mathcal{O}_\delta(z_0)\setminus\{z_0\}$ platí $\max_{\zeta\in[\gamma_z]}|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$. Odtud díky ($*$) vyplývá, že jsme nalezli okolí z_0 takové, že pro každé $z \neq z_0$ z tohoto okolí bude $|F_1(z) - F_1(z_0)| < \varepsilon$, což znamená, že $\lim_{z\to z_0} F(z) = F(z_0)$, tj. funkce F je spojitá v bodě z_0 a důkaz je hotov. ∎

Definice 6.17

Nechť $D \subseteq \mathbb{C}$ je otevřená množina. Funkci $F : D \to \mathbb{C}$ splňující část (i) Věty 6.16 nazýváme *primitivní* funkcí k dané spojité funkci $f : D \to \mathbb{C}$.

Věta 6.17A

Nechť f je holomorfní na otevřené množině $D \subseteq \mathbb{C}$ a platí zde $f' \equiv 0$. Pak f je lokálně konstantní na D (tj. pro každé $z_0 \in D$ existuje okolí $\mathcal{O}(z_0)$ takové, že $f(z) \equiv c$ pro každé $z \in \mathcal{O}(z_0)$ a nějaké $c \in \mathbb{C}$). Je-li D oblast, pak dokonce $f(z) = c$ pro každé $z \in D$ a nějaké $c \in \mathbb{C}$.

Důkaz. Z Definice 6.17 a předpokladů vyplývá, že f je primitivní funkcí k nulové funkci na D. Protože v každém okolí $\mathcal{O}(z_0)$ můžeme libovolný bod $z \in \mathcal{O}(z_0)$ spojit úsečkou γ s počátečním bodem ve středu okolí z_0 a koncovým bodem z, plyne z Věty 6.16, že

$$0 = \int_\gamma 0\,dz = f(z) - f(z)_0), \tag{6.2}$$

tj. $f(z) = f(z_0)$ pro každé $z \in \mathcal{O}(z_0)$, a tedy f je lokálně konstantní na D. Konstantnost v oblasti D plyne z předchozí části a souvislosti množiny D (propojení lomenou čárou v D=cestou $\rightsquigarrow$ pro počáteční a koncový bod opět platí (6.2) $\rightsquigarrow$ konstanty musí být totožné). ∎

Věta 6.18

Nechť $f : D \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce na otevřené množině $D \subseteq \mathbb{C}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.

(i) Funkce f má v D primitivní funkci.

(ii) Pro každou uzavřenou cestu v D platí $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

(iii) Integrál $\int_\gamma f(z)\,dz$ nezávisí v D na integrační cestě.

Důkaz. Implikace (i)⇒(ii) a (i)⇒(iii) plynou ihned z první části Věty 6.16. Implikace (ii)⇒(iii) je zřejmá. Stačí proto ukázat (ii)⇒(i). Nechť tedy platí (ii). Protože cesta v D musí ležet v jedné souvislé komponentě množiny D, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že D je dokonce oblast. Nechť γ je libovolná cesta v D s počátečním bodem $w \in D$ a koncovým bodem $z \in D$. Zvolme bod $z_1 \in D$ libovolně pevně a označme γ_z a γ_w libovolné cesty ležící v D počátečním bodem z_1 a koncovým bodem z a w. Definujme funkci

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta)\,d\zeta \quad \text{pro kadžé } z \in D.$$

Protože $\gamma_w \dotplus \gamma \dotminus \gamma_z$ je uzavřená cesta v D, platí

$$0 \overset{\text{(ii)}}{=} \int_{\gamma_w \dotplus \gamma \dotminus \gamma_z} f(\zeta)\,d\zeta \overset{\text{Věta 6.15}}{=} \int_{\gamma_w} f(\zeta)\,d\zeta + \int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta - \int_{\gamma_z} f(\zeta)\,d\zeta = F(w) + \int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta + F(z).$$

Odtud dostáváme

$$\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = F(z) - F(w)$$

a tvrzení (i) plyne z druhé části Věty 6.16. ∎

Funkci se sen odebral,
chtěla znát svůj integrál
přes uzavřenou křivku,
což zplodilo výtku,
že ten vyšel nenulový,
nářek nelze popsat slovy,
vůbec nikdo neovlivní,
že nemá funkci primitivní
na příslušné oblasti,
odchází v dál bez slasti.

(Báseň od J. Frýdka)

7. Cauchyho teorie a některé další vlastnosti holomorfních funkcí

Nezlobte se, milí hoši,
můj idol je pouze Cauchy,
každý dopis skončí v koši,
pokud by jej nepsal Cauchy.

(Báseň od J. Frýdka)

Věta 7.1 (*Cauchy*)

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast a funkce f je holomorfní v Ω. Pak pro každou uzavřenou cestu γ v Ω (tj. $[\gamma] \subset \Omega$) platí

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Důsledek 7.2

K holomorfní funkci v jednoduše souvislé oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ existuje primitivní funkce.

Lemma 7.3 (*Goursat*)

Nechť $f : D \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce v otevřené množině $D \subseteq \mathbb{C}$ a nechť γ je cesta v D. Pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje taková lomená čára $\widetilde{\gamma}$ s vrcholy na $[\gamma]$, že $[\widetilde{\gamma}] \subset D$ a

$$\left| \int_\gamma f(z)\,dz - \int_{\widetilde{\gamma}} f(z)\,dz \right| < \varepsilon.$$

Je-li navíc cesta γ uzavřená, lze i o lomené čáře $\widetilde{\gamma}$ předpokládat, že je uzavřená.

Důkaz Lemma 7.3. Ne. ∎

Důkaz Věty 7.1. Důkaz je rozdělen do několika kroků.

(i) Nechť $\gamma : [\alpha, \beta] \to \Omega$ je uzavřená cesta v Ω a $\varepsilon > 0$ je libovolné. Podle Lemma 7.3 existuje lomená čára $\widetilde{\gamma}$ taková, že $\left|\int_\gamma f(z)\,dz - \int_{\widetilde{\gamma}} f(z)\,dz\right| < \varepsilon$, přičemž vrcholy lomené čáry $\widetilde{\gamma}$ leží na $[\gamma]$. Je-li $\int_{\widetilde{\gamma}} f(z)\,dz = 0$, pak $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| < \varepsilon$, což je vzhledem k libovolnosti $\varepsilon > 0$ možné jedině tak, že $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$. Proto stačí dokázat tvrzení věty pouze pro lomenou čáru v Ω.

(ii) Je-li γ uzavřená lomená čára, pak vhodnou volbou úseček lze dosáhnout toho, že $\gamma = \gamma_1 \dotplus \cdots \dotplus \gamma_n$, kde γ_j pro $j \in \{1, \dots, n\}$ jsou lineární funkce a $[\gamma_j] \cap [\gamma_k] = \varnothing$ nebo $[\gamma_j] \cap [\gamma_k]$ je společný krajní bod úseček $[\gamma_j], [\gamma_k]$ nebo $[\gamma_j] = [\gamma_k]$ pro libovolné $j, k \in \{1, \dots, n\}$. Protože každý integrál je aditivní vzhledem k integrační cestě a protože $\int_{\gamma_j} f(z)\,dz = -\int_{\gamma_k} f(z)\,dz$, je-li úsečka γ_k ekvivalentní s $\dot{-}\gamma_j$, existuje konečně mnoho uzavřených lomených čar $\omega_1, \dots, \omega_m$, které jsou Jordanovými cestami tvořenými některými z úseček $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, takových, že platí

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\omega_1} f(z)\,dz + \cdots + \int_{\omega_m} f(z)\,dz.$$

(iii) Je-li γ uzavřen lomená čára, která je Jordanovou křivkou, je grafem γ hranice mnohoúhelníku. Přitom lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že žádné dvě sousední strany tohoto mnohoúhelníku neleží na stejné přímce. Poněvadž v každém n-úhelníku pro $n \geqslant 4$ existuje alespoň jedna vnitřní úhlopříčka, lze mnohoúhelník rozdělit na trojúhelníky a integraci převést na integrál přes hranice jednotlivých trojúhelníků. Přitom integrace po vnitřních úhlopříčkách se provádí dvakrát: pokaždé v jiném směru, takže součet odpovídajících integrálů je pak roven 0. Stačí se tedy omezit pouze na lomenou čáru, která je Jordanovou křivkou a jejíž graf je hranicí trojúhelníku.

(iv) („Technická záležitost“) Nechť tedy γ je uzavřená lomená čára v Ω, jejímž grafem je hranice trojúhelníku $T \subset \Omega$. Pro určitost ještě předpokládejme, že γ je orientována kladně (to má vliv jen na znaménko). Označme

$$I := \left|\int_\gamma f(z)\,dz\right|.$$

Naším cílem je tedy dokázat, že $I = 0$. Položme $T_0 = T$ a rozdělme T_0 pomocí spojnic středů stran (středních příček) na 4 menší trojúhelníky, které označíme T^1, T^2, T^3 a T^4, přičemž hranicemi těchto trojúhelníků jsou grafy kladně orientovaných lomených čar označených jako $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ a γ^4. Jistě platí

$$I = \left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| = \left|\sum_{j=1}^{4} \int_{\gamma^j} f(z)\,dz\right| \leqslant \sum_{j=1}^{4} \left|\int_{\gamma^j} f(z)\,dz\right|,$$

tudíž alespoň pro jedno $j \in \{1, \dots, 4\}$ musí být

$$\left|\int_{\gamma^j} f(z)\,dz\right| \geqslant I/4.$$

Označme odpovídající trojúhelník jako T_1 a lomenou čáru s grafem tvořícím jeho hranici jako γ_1, tj.

$$\left|\int_{\gamma_1} f(z)\,dz\right| \geqslant I/4.$$

Nyní opět rozdělíme trojúhelník T_1 spojnicemi středů stran na 4 menší trojúhelníky, jejichž hranice tvoří grafy lomených čar. Mezi nimi jistě existuje alespoň jedna (označíme ji jako γ_2 a odpovídající trojúhelník jako T_2), pro kterou platí

$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right| \geqslant I/4^2.$$

Úplnou indukcí takto získáme posloupnost lomených čar $\{\gamma_j\}_{j=1}^{\infty}$, jejichž grafy jsou hranicemi trojúhelníků $T_1, T_2, \ldots$, přičemž platí

$$T_1 \supset T_2 \supset T_3 \supset \ldots,$$

$\operatorname{diam}(T_n) \to 0$ pro $n \to \infty$ („průměr“) a také

$$\left|\int_{\gamma_n} f(z)\,dz\right| \geqslant I/4^n. \tag{7.1}$$

Současně se snadno přesvědčíme (trojúhelníky vznikají půlením stran), že platí

$$L(\gamma_n) = \frac{L(\gamma)}{2^n} \tag{7.2}$$

Protože $\mathbb{C}$ je úplný metrický prostor, trojúhelníky T_n jsou do sebe vnořené kompaktní podmnožiny $\mathbb{C}$ a $\operatorname{diam}(T_n) \to 0$, musí být $\bigcap_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} T_n \neq \varnothing$ (tzv. Cantorova věta o průniku kompaktů), tj. existuje $z_0 \in T_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Protože $T_n \subset \Omega$ pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, jistě $z_0 \in \Omega$ a vzhledem k holomorfnosti funkce f existuje $f'(z_0)$. Nechť nyní $\varepsilon > 0$ je libovolné. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že $K(z_0, \delta) \subset \Omega$ a pro $z \in K(z_0, \delta)\setminus\{z_0\}$ platí

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon,$$

a tedy pro všechna $z \in K(z_0, \delta)$ máme

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leqslant \varepsilon\,|z - z_0|\,. \tag{7.3}$$

Protože k lineární funkci $g(z) := f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ existuje primitivní funkce, plyne z uzavřenosti křivek $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ a Věty 6.18, že

$$\int_{\gamma_n} [f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)]\,dz = 0 \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Odtud pak dostáváme

$$\int_{\gamma_n} f(z)\,dz = \int_{\gamma_n} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)]\,dz. \tag{7.4}$$

Současně z $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(T_n) = 0$ a $z_0 \in T_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ vyplývá existence indexu $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takového, že $T_n \subset K(z_0, \delta)$ pro všechna $n \geqslant n_0$. Navíc pro $z \in [\gamma_n]$ je $|z - z_0| < L(\gamma_n)$. Jestliže tedy $n \in \{n_0, n_0+1, \dots\}$ je libovolné, potom

$$I/4^n \overset{(7.1)}{\leqslant} \left|\int_{\gamma_n} f(z)\,dz\right| \overset{(7.4)}{=} \left|\int_{\gamma_n} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z-z_0)]\,dz\right| \overset{(7.3)}{\leqslant} \varepsilon \int_{\gamma_n} |z - z_0|\,dz$$
$$\leqslant \varepsilon L(\gamma_n) \int_{\gamma_n} dz = \varepsilon L^2(\gamma_n) \overset{(7.2)}{=} \varepsilon \left(\frac{L(\gamma)}{2^n}\right)^2 = \varepsilon \frac{L^2(\gamma)}{4^n}$$

neboli

$$I/4^n \leqslant \varepsilon \frac{L^2(\gamma)}{4^n}, \quad \text{tj.} \quad I \leqslant \varepsilon L^2(\gamma).$$

Ovšem vzhledem k libovolnosti $\varepsilon > 0$ plyne z poslední nerovnosti požadovaná rovnosti $I = 0$.

■

Věta 7.3A (*Cauchy–Goursat*)

Nechť γ je Jordanova cesta v $\mathbb{C}$ a f je holomorfní funkce v $\operatorname{Int}\gamma$ a spojitá na $\overline{\operatorname{Int}\gamma} = \operatorname{Int}\gamma \cup [\gamma]$. Potom platí

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Důkaz. Ne. ■

Uvažme Jordanovu křivku γ v $\mathbb{C}$ a pro dané $n \in \mathbb{N}$ také n-tici Jordanových křivek $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ takových, že graf libovolné z nich leží ve vnějšku každé ze zbývajících křivek, tj. $[\gamma_k] \subset \operatorname{Ext}\gamma_j$ pro všechna $k, j \in \{1, \dots, n\}$, $k \neq j$, a ve vnitřku křivky γ, tj. $[\gamma_j] \subset \operatorname{Int}\gamma$ pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$. Potom $(n+1)$-násobně souvislá oblast

$$G := \operatorname{Int}\gamma \cap \operatorname{Ext}\gamma_1 \cap \cdots \cap \operatorname{Ext}\gamma_n$$

má *kladně orientovanou hranici*, jestliže křivky $\gamma, \div\gamma_1, \dots, \div\gamma_n$ jsou kladně orientované.

Věta 7.3B (*Cauchyho pro vícenásobně souvislou oblast*)

Nechť G je $(n+1)$-násobně souvislou oblastí s kladně orientovanou hranicí tvořenou Jordanovými cestami. Je-li f holomorfní na oblasti G a spojitá na jejím uzávěru, tj. na množině $\overline{G} = G \cup [\gamma] \cup [\gamma_1] \cup \cdots \cup [\gamma_n]$, pak platí

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^n \int_{\div\gamma_k} f(z)\,dz \quad \textit{neboli} \quad \int_\gamma f(z)\,dz + \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z)\,dz = 0.$$

Důkaz. Pro $n = 1$ máme integrál přes 2-násobně souvislou oblast. Jelikož $[\gamma_1] \subset \operatorname{Int}\gamma$ lze spojit $[\gamma_1]$ a $[\gamma]$ dvěma různými neprotínajícími se oblouky φ_1 a φ_2. Tím se nám původní množina

„rozpadla“ na 2 disjunktní oblasti G_1 a G_2, které mají společnou část hranice tvořenou φ_1 a φ_2. Na těchto oblastech jsou splněny předpoklady Věty 7.3A, takže platí

$$\int_{\gamma^1+\varphi_2+\gamma_1^1+\varphi_1} f(z)\,dz = 0 \quad \text{a současně} \quad \int_{\gamma^2-\varphi_1+\gamma_1^2-\varphi_2} f(z)\,dz = 0.$$

Vzhledem k aditivitě křivkového integrálu odtud dostáváme

$$\left(\int_{\varphi_1} + \int_{\varphi_2}\right) f(z)\,dz = -\int_{\gamma^1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_1^1} f(z)\,dz$$

a současně

$$\left(\int_{\varphi_1} + \int_{\varphi_2}\right) f(z)\,dz = \int_{\gamma^2} f(z)\,dz + \int_{\gamma_1^2} f(z)\,dz,$$

z čehož snadno získáme rovnost

$$\left(\int_{\gamma^1} + \int_{\gamma^2}\right) f(z)\,dz = -\left(\int_{\gamma_1^1} + \int_{\gamma_1^2}\right) f(z)\,dz,$$

a tudíž (opět díky aditivitě)

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = -\int_{\gamma_1} f(z)\,dz.$$

Důkaz pro obecné $n \in \mathbb{N}$ se pak provede pomocí indukce, neboť $(n+1)$-násobně souvislou oblast s kladně orientovanou hranicí analogickým postupem rozdělíme na n-násobně souvislou oblast a jednoduše souvislou oblast. ■

Věta 7.4 (*Cauchyho vzorec pro Jordanovu cestu*)

Nechť γ je kladně orientovaná Jordanova cesta v $\mathbb{C}$ a $\Omega := \operatorname{Int}\gamma$ její vnitřek. Nechť $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ je holomorfní v Ω a spojitá na $\overline{\Omega}$. Pak platí

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \begin{cases} f(z_0), & z_0 \in \Omega, \\ 0, & z_0 \notin \Omega. \end{cases}$$

Důkaz. Nechť $z_0 \in \Omega$ a $\varepsilon > 0$ jsou libovolná čísla (komplexní a reálné). Vzhledem ke spojitosti funkce f existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $z \in \Omega$ splňující $|z - z_0| < \delta$ platí $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon/(2\pi)$. Zvolme nyní $r \in (0, \delta)$ tak, že $\overline{K(z_0, r)} \subset \Omega$ a položme $\omega(t) = z_0 + r\,e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, tj. ω je kružnice v Ω se středem v z_0 a poloměrem r. Potom podle Věty 7.3B (pro $n = 1$) platí

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_{\omega} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz + f(z_0)\int_{\gamma} \frac{1}{z-z_0}\,dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz + 2\pi i f(z_0),$$

z čehož dále plyne

$$\left|\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - 2\pi i f(z_0)\right| = \left|\int_{\gamma} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right| \overset{(6.1)}{\leqslant} \sup_{z\in[\omega]} \left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| \times L(\omega) \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi} \times \frac{1}{r} \times 2\pi r = \varepsilon,$$

neboť $L(\omega) = 2\pi r$ a pro $z \in [\omega]$ je $|z - z_0| = r$. Protože ale ε bylo zvoleno libovolně, musí platit

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0).$$

Pro $z_0 \notin \overline{\Omega}$ plyne tvrzení přímo z Věty 7.3A. ∎

Důsledek 7.5 (*Věta o průměru*)

Nechť γ je kružnice se středem v $z_0 \in \mathbb{C}$ a poloměrem $r > 0$, tj. $\gamma(t) = z_0 + r\,e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Je-li f holomorfní v $\operatorname{Int}\gamma$, spojitá na uzávěru $\overline{\operatorname{Int}\gamma} = \operatorname{Int}\gamma \cup [\gamma]$, pak platí

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f(z_0 + r\,e^{it})\,dt.$$

Jinými slovy, hodnota holomorfní funkce v bodě je „průměrem“ hodnot (střední hodnotou) na každé libovolně malé kružnici se středem v uvažovaném bodě.

Důkaz. Ne. ∎

Věta 7.6 (*Cauchyho vzorec pro n-tou derivaci*)

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast a nechť γ je kladně orientovaná Jordanova cesta splňující $[\gamma] \subset \Omega$. Jestliže f je holomorfní funkce v Ω, pak pro každé $z_0 \in \operatorname{Int}\gamma$ a libovolné $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ existuje derivace $f^{(n)}(z_0)$ a platí

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz.$$

Důkaz. Tvrzení dokážeme pomocí matematické indukce. Pro $n = 0$ tvrzení platí díky Větě 7.4. Předpokládejme, že tvrzení platí pro nějaké $n = k - 1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ukážeme jeho platnost také pro $n = k$. Nechť $z_0 \in \operatorname{Int}\gamma$ je libovolné a $\omega(t) := z_0 + r\,e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, přičemž $r > 0$ je tak, malé, že $[\omega] \subset \operatorname{Int}\gamma$. Podle indukčního předpokladu a Věty 7.3B s $n = 1$ (tj. pro dvojici) platí

$$f^{(k-1)}(z_0) = \frac{(k-1)!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^k}\,dz = \frac{(k-1)!}{2\pi i}\int_\omega \frac{f(z)}{(z - z_0)^k}\,dz. \tag{7.5}$$

Nechť dále $h \in \mathbb{C}$ je takové, že $|h| < r/2$. Potom $z_0 + h \in \operatorname{Int}\omega$ a

$$3r/2 \geqslant |z - z_0 - h| \geqslant r/2 \quad \text{pro libovolné } z \in [\omega]$$

a současně

$$f^{(k-1)}(z_0 + h) = \frac{(k-1)!}{2\pi i}\int_\omega \frac{f(z)}{(z - z_0 - h)^k}\,dz. \tag{7.6}$$

Z rovností (7.5) a (7.6) plyne

$$\frac{f^{(k-1)}(z_0 + h) - f^{(k-1)}(z_0)}{h} = \frac{(k-1)!}{2\pi i h}\int_\omega f(z)\left(\frac{1}{(z - z_0 - h)^k} - \frac{1}{(z - z_0)^k}\right)dz.$$

Jelikož pro libovolné $\alpha, \beta \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ platí (ověřte sami!)

$$\frac{1}{\beta^n} - \frac{1}{\alpha^n} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha^{n+1}}\left(n + \frac{(\alpha-\beta)\sum_{j=1}^{n} j\,\beta^{j-1}\,\alpha^{n-j}}{\beta^n}\right),$$

volbou $\alpha = z - z_0$, $\beta = z - z_0 - h$ a $n = k$ obdržíme

$$\begin{aligned}\frac{f^{(k-1)}(z_0+h) - f^{(k-1)}(z_0)}{h} &= \\ &= \frac{(k-1)!}{2\pi i h}\int_\omega f(z)\,\frac{h}{(z-z_0)^{k+1}}\left(k + \frac{h\sum_{j=1}^{k} j\,(z-z_0-h)^{j-1}\,(z-z_0)^{n-j}}{(z-z_0-h)^k}\right)dz = \\ &= \frac{k!}{2\pi i}\int_\omega \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz + \\ &\qquad + \frac{(k-1)!}{2\pi i}\int_\omega \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \times h \times \frac{\sum_{j=1}^{k} j\,(z-z_0-h)^{j-1}\,(z-z_0)^{n-j}}{(z-z_0-h)^k}\,dz.\end{aligned}$$

Odtud s využitím rovnosti $L(\omega) = 2\pi r$ získáme

$$\begin{aligned}\left|\frac{f^{(k-1)}(z_0+h) - f^{(k-1)}(z_0)}{h} - \frac{k!}{2\pi i}\int_\omega \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz\right| &= \\ = \frac{(k-1)!}{2\pi}\left|\int_\omega \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \times h \times \frac{\sum_{j=1}^{k} j\,(z-z_0-h)^{j-1}\,(z-z_0)^{n-j}}{(z-z_0-h)^k}\,dz\right| &\leqslant \\ \overset{(6.1)}{\leqslant} \frac{(k-1)!}{2\pi} \times |h| \times 2\pi r \times \max_{z\in[\omega]}|f(z)| \times \frac{\sum_{j=1}^{k} j\,(3r/2)^{j-1}\,r^{k-j}}{r^{k+1}\,(r/2)^k} &= A\,|h|,\end{aligned}$$

kde A je vhodné nezáporné číslo. Tudíž

$$f^{(k)}(z_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f^{(k-1)}(z_0+h) - f^{(k-1)}(z_0)}{h} = \frac{k!}{2\pi i}\int_\omega \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz,$$

z čehož díky Větě 7.3B s $n = 1$ opět plyne požadovaná rovnost (tj. integrál podél γ). ∎

Důsledek 7.7

(i) Nechť f je holomorfní funkce na otevřené množině $D \subseteq \mathbb{C}$. Pak f má v D derivace všech řádů, které jsou holomorfními funkcemi v D.

(ii) (Cauchyho nerovnost) Je-li f holomorfní v kruhu $K(z_0, r)$ a spojitá na $\overline{K(z_0, r)}$, pak pro $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ platí

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leqslant \frac{n!}{r^n}\max_{|z-z_0|=r}|f(z)|.$$

(iii) (jiná varianta Cauchyho nerovnosti) Je-li f holomorfní funkce v kruhu $K(z_0, r)$ a existuje-li $M \geqslant 0$ takové, že $|f(z)| \leqslant M$ pro všechna $z \in K(z_0, r)$, pak pro libovolné $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ platí

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leqslant \frac{n!}{r^n}M.$$

Důkaz. Část (i) plyne ihned z Věty 7.6. Ostatní ne. ∎

Věta 7.7A (*Morera*)

Nechť funkce f je spojitá na otevřené množině $D \subseteq \mathbb{C}$ a nechť $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ pro každou uzavřenou cestu γ v D. Pak funkce f je holomorfní v D.

Důkaz. Jelikož $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ pro uzavřenou cestu γ v D, existuje podle Věty 6.18 primitivní funkce F v Ω, tj. $F'(z) = f(z)$ pro všechna $z \in \Omega$. Pak ale funkce F je holomorfní na Ω, a tedy podle Důsledku 7.7(i) existuje $F^{(n)}(z)$ pro všechna $z \in \Omega$ a $n \in \mathbb{N}$. Zejména existuje $f'(z) = F''(z)$ pro všechna $z \in \Omega$, a tedy funkce f je holomorfní na Ω. ∎

Věta 7.8 (*o rozvinutelnosti*)

Nechť funkce f je holomorfní v otevřeném kruhu $K(z_0, r)$, kde $z_0 \in \mathbb{C}$ a $0 < r \leqslant \infty$. Pak pro $z \in K(z_0, r)$ platí (přičemž konvergence je na tomto kruhu skoro stejnoměrná)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n,$$

neboli

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \text{kde} \quad a_n := \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\,d\xi$$

a γ je kladně orientovaná kružnice se středem v z_0 a poloměrem $0 < \rho < r$.

Věta 7.8A (*o záměně*)

Nechť γ je cesta v $\mathbb{C}$ a $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost spojitých funkcí $f_n : [\gamma] \to \mathbb{C}$ takových, že $f_n \rightrightarrows f$ na $[\gamma]$, přičemž $f : [\gamma] \to \mathbb{C}$. Potom platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz = \int_\gamma \lim_{n\to\infty} f_n(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz.$$

Důkaz. Ne. ∎

Důsledek 7.8B

Nechť γ je cesta v $\mathbb{C}$ a $f_n : [\gamma] \to \mathbb{C}$ pro $n \in \mathbb{N}$ jsou spojité funkce takové, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ konverguje stejnoměrně na $[\gamma]$ k funkci $f : [\gamma] \to \mathbb{C}$. Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz = \int_\gamma \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\right) dz = \int_\gamma f(z)\,dz.$$

Důkaz. Ne. ∎

Důkaz Věty 7.8. Nechť $z \in K(z_0, r)$ je pevně dáno. Zvolme číslo $\rho > 0$ takové, že $|z - z_0| < \rho < r$ a položme $\gamma(t) = z_0 + r\,e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Potom podle Věty 7.4 platí

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

Jelikož pro libovolné $\zeta \in [\gamma]$ máme $\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| = \frac{|z-z_0|}{\rho} < 1$, dostaneme pro tato ζ pomocí geometrické řady rozvoj

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \times \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \times \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n,$$

z čehož plyne

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n.$$

ze spojitosti funkce f na kompaktní množině $[\gamma]$ plyne existence čísla $k > 0$ takového, že $|f(\zeta)| \leqslant k$ pro všechna $\zeta \in [\gamma]$. Pro tato ζ tedy máme

$$\left|\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n\right| \leqslant \frac{k}{\rho} \left(\frac{|z - z_0|}{\rho}\right)^n.$$

Jelikož číselná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{k}{\rho} \left(\frac{|z - z_0|}{\rho}\right)^n$$

je konvergentní (protože $\frac{|z-z_0|}{\rho} < 1$), plyne z Weiestrassova kritéria pro stejnoměrnou konvergenci funkčních řad (Věta 4.3) stejnoměrná konvergence také pro řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n$$

na $[\gamma]$. Tedy platí

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n\right) d\zeta =$$
$$\overset{\text{Důsledek 7.8B}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta\right) (z - z_0)^n \overset{\text{Věta 7.6}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n,$$

z čehož plyne také druhá část tvrzení. ∎

Věta 7.9 (*o jednoznačnosti*)

Nechť f, g jsou holomorfní funkce v oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní

(i) $f(z) = g(z)$ *pro všechna* $z \in \Omega$,

(ii) množina $\{z \in \Omega \mid f(z) = g(z)\}$ *má alespoň jeden hromadný bod v* Ω,

(iii) existuje $c \in \Omega$ *takové, že* $f^{(n)}(c) = g^{(n)}(c)$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Důkaz. Ne. ∎

Důsledek 7.10

(i) Nechť f *je holomorfní funkce v oblasti* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$*, která zde není identicky nulová. Pak množina nulových bodů funkce* f *v* Ω *nemá v* Ω *hromadný bod, tj. každý nulový bod* f *v* Ω *je izolovaný.*

(ii) Holomorfní funkce $f(z) \not\equiv 0$ *může mít nejvýše spočetně mnoho nulových bodů v oblasti* Ω.

Důkaz. Ne. ∎

Věta 7.10.0 (*Rouché*)

Nechť γ *je Jordanova cesta v* $\mathbb{C}$ *a funkce* f, g *holomorfní v* $\overline{\operatorname{Int}\gamma}$*. Jestliže* $|f(z)| > |g(z)|$ *pro všechna* $z \in [\gamma]$*, pak funkce* $f + g$ *a* f *mají v* $\operatorname{Int}\gamma$ *stejný počet nulových bodů.*

Důkaz. Dostatečné nástroje budeme mít až na konci … ∎

Věta 7.10.00 (*Hurwitz*)

Jsou-li funkce f_n *holomorfní v oblasti* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$*, přičemž tyto funkce nemají v* Ω *nulové body a současně konvergují skoro stejnoměrně k funkci* f*, pak* f *buď nemá nulové body v* Ω*, nebo* $f \equiv 0$ *na* Ω.

Důkaz. Ne. ∎

Věta 7.10A (*Weiestrass*)

Nechť $D \subseteq \mathbb{C}$ *je otevřená množina a nechť funkce* $f_n : D \to \mathbb{C}$ *jsou pro* $n \in \mathbb{N}$ *holomorfní na* D*. Jestliže řada* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *konverguje na* D *skoro stejnoměrně k součtu* $f : D \to \mathbb{C}$*, pak* f *je holomorfní na* D *a pro každé* $k \in \mathbb{N}$ *také řada* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ *konverguje skoro stejnoměrně na* D *k součtu* $f^{(k)}(z)$.

Důkaz. Ne. ∎

Důsledek 7.10B (*Weiestrass pro posloupnosti*)

Nechť $D \subseteq \mathbb{C}$ *je otevřená množina a nechť funkce* $f_n : D \to \mathbb{C}$ *jsou pro* $n \in \mathbb{N}$ *holomorfní na* D*. Jestliže posloupnost* $\{f_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konverguje na* D *skoro stejnoměrně k funkci* $f : D \to \mathbb{C}$*, pak* f *je také holomorfní na* D *a pro každé* $k \in \mathbb{N}$ *platí, že také posloupnost* $\{f_n^{(k)}(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konverguje skoro stejnoměrně k funkci* $f^{(k)}(z)$ *na* D.

Důkaz. Ne. ∎

Definice 7.10C

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je oblast a funkce $f : \Omega \to \mathbb{C}$ je holomorfní. Funkci f nazveme *holomorfně rozšiřitelnou*

(nebo prodloužitelnou) *k hraničnímu bodu* $z_0 \in \Omega$, jestliže existuje $\mathcal{O}(z_0)$ a holomorfní funkce $g : \mathcal{O}(z_0) \to \mathbb{C}$ tak, že $f(z) = g(z)$ pro všechna $z \in \mathcal{O}(z_0) \cap \Omega$, přičemž $z_0 \in \partial(\mathcal{O}(z_0) \cap \Omega)$. V opačném případě nazveme bod $z_0 \in \Omega$ *singulárním*, tj. neexistuje $\mathcal{O}(z_0) = K(z_0, r)$ a holomorfní funkce $g : \mathcal{O}(z_0) \to \mathbb{C}$ tak, že $f(z) = g(z)$ pro všechna $z \in \mathcal{O}(z_0) \cap \Omega$.

Důkaz. Ne. ∎

Věta 7.10D (*o existenci singulárních bodů*)

Každá mocninná řada $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ s poloměrem konvergence $0 < R < \infty$ má na hranici konvergenčního kruhu $\partial K(z_0, R)$ vždy alespoň jeden singulární bod.

Důkaz. Ne. ∎

Věta 7.10E (*Vivanti–Pringsheim*)

Nechť mocninná řada $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ má poloměrem konvergence $0 < R < \infty$ a současně $a_k \geqslant 0$ pro skoro všechna $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (tj. až na konečný počet). Potom bod $z = R$ je singulárním bodem funkce f (tj. f nelze holomorfně rozšířit v okolí R).

Důkaz. Ne. ∎

Věta 7.10F (*princip maxima /modulu/*)

(i) Nechť f je holomorfní na ohraničené oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ a spojitá na $\overline{\Omega}$. Jestliže $|f(z)| \leqslant M$ pro všechna $z \in \partial\Omega$ a nějaké $M > 0$, potom $|f(z)| \leqslant M$ pro všechna $z \in \Omega$, přičemž $|f(z)| = M$ nastane pro $z \in \Omega$ pouze v případě, že f je konstantní na Ω.

(ii) Maximum funkce $|f(z)|$ je dosaženo na hranici jakékoli ohraničené oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, kde f je holomorfní. Navíc to nastane pouze na této hranici s výjimkou konstantní funkce f.

(iii) Nechť f je holomorfní na oblasti (i neohraničené) $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Potom $|f(z)|$ nemůže nabýt ostrého lokálního maxima ($|f(z_0)| > |f(z)|$ pro všechna $z \in \mathcal{O}(z_0) \setminus \{z_0\}$) v Ω a může mít lokální maximum (jakékoli) v Ω pouze v případě, že f je konstantní na Ω.

Důkaz. Ne. ∎

Důsledek 7.10G

(i) Nechť $f : \Omega \to \mathbb{C}$ je holomorfní v oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ a nechť existuje $z_0 \in \Omega$, ve kterém nabývá $|f(z)|$ svého lokálního minima, tj. $|f(z_0)| = \min_{z \in \mathcal{O}(z_0)} |f(z)|$ pro nějaké okolí $\mathcal{O}(z_0) \subseteq \Omega$ bodu z_0. Potom buď $f(z_0) = 0$ nebo f je konstantní na Ω.

(ii) Nechť $f : \Omega \to \mathbb{C}$ je holomorfní na ohraničené oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ a spojitá na $\overline{\Omega}$. Pak buď f má nulové body v Ω nebo $|f|$ nabývá svého minima přes $\overline{\Omega}$ na $\partial\Omega$, tj. $|f(z)| \geqslant \min_{s \in \partial\Omega} |f(s)|$ pro všechna $z \in \Omega$.

Důkaz. Ne. ∎

Definice 7.11

Funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se nazývá *celá*, jestliže je holomorfní na celém $\mathbb{C}$. Celé funkce, které nejsou polynomy, se nazývají *transcendentní*.

Lemma 7.12

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Pak funkce f je polynomem stupně menšího než n právě tehdy, když je celá a platí

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^n} = 0. \tag{7.7}$$

Důkaz. „⇒“ zřejmé (rovnost jistě platí pro polynomy stupně menšího než n, což jsou celé funkce).

„⇐“ Nechť platí (7.7) a nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je libovolné. Zvolme $r > 0$ tak, aby $r \geqslant 2|z_0|$ a položme $\gamma(t) = r\,e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Pak γ je kružnice, $z_0 \in \operatorname{Int}\gamma$ a podle Věty 7.6 platí

$$|f^n(z_0)| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\right| = \frac{n!}{2\pi}\left|\int_\gamma \frac{f(z)}{z^n} \times \frac{1}{(1-z_0/z)^n} \times \frac{1}{z-z_0}\,dz\right|.$$

Protože $L(\gamma) = 2\pi r$ a $|1 - z_0/z| \geqslant 1 - |z_0/z| \geqslant 1/2$ a $|z - z_0| \geqslant r/2$, dostáváme

$$|f^n(z_0)| \leqslant \frac{n!}{2\pi} \times \frac{1}{(1/2)^n} \times \frac{1}{r/2} \times \max_{|z|=r}\left|\frac{f(z)}{z^n}\right| \times L(\gamma) = n!\,2^{n+1} \times \max_{|z|=r}\left|\frac{f(z)}{z^n}\right|.$$

Odtud ale s využitím (7.7) plyne pro $r \to \infty$, že

$$|f^n(z_0)| \leqslant 0,$$

a tedy

$$f^n(z_0) = 0 \quad \text{pro všechna } z \in \mathbb{C} \text{ (neboť } z_0 \text{ bylo zvoleno libovolně).}$$

Požadované tvrzení pak vyplývá z Důsledku 3.13(ii). ∎

Věta 7.13 (*Liouville*)

Ohraničená celá funkce je konstantní.

Důkaz. Je-li f ohraničená celá funkce, existuje $k > 0$ takové, že $|f(z)| \leqslant k$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$. Pak platí

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leqslant \frac{k}{z} \to 0 \quad \text{pro } z \to \infty \ .$$

Podle Lemma 7.12 je tedy f polynom stupně menšího než 1, a tedy konstantní. ∎

V jedné z velkých chvil
objevil pan Liouville,
že funkce celá omezená
nic jiného neznamená,
než že je všude konstanta.
Byl komplexní pantáta.

(Báseň od J. Frýdka)

Věta 7.14 (*malá Picardova*)

Každá nekonstantní celá funkce nabývá všech hodnot z $\mathbb{C}$ s výjimkou nejvýše jedné.

Důkaz. Ani náhodou... ∎

Věta 7.15 (*základní věta algebry*)

Každý nekonstantní komplexní polynom má v $\mathbb{C}$ alespoň jeden nulový bod.

Důkaz. Nechť $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ je polynom s komplexními koeficienty, přičemž $a_n \neq 0$ a $n \geqslant 1$. Je-li $a_0 = 0$, pak $z = 0$ je očividně kořen, a tedy tvrzení platí. Nechť proto dále $a_0 \neq 0$. Pak pro $z \neq 0$ platí

$$p(z) = z^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right),$$

z čehož plyne $\lim_{z\to\infty} p(z) = \infty$, a tedy $\lim_{z\to\infty} 1/p(z) = 0$. Existují tedy konstanty $K, r > 0$ takové, že

$$\left| \frac{1}{p(z)} \right| \leqslant K \quad \text{pro všechna } |z| > r \text{ (tj. v okolí } \infty). \tag{7.8}$$

Připusťme, že p nemá v $\mathbb{C}$ kořen. Pak je funkce $1/p$ holomorfní pro všechna $z \in \mathbb{C}$, tj. je to celá funkce. Funkce $1/p$ je tedy také spojitá na $\mathbb{C}$, a proto existuje $L > 0$ takové, že

$$\left| \frac{1}{p(z)} \right| \leqslant L \quad \text{pro všechna } |z| \leqslant r. \tag{7.9}$$

Nerovnosti (7.8) a (7.9) ukazují, že $1/p$ je ohraničená celá funkce, takže podle Věty 7.13 platí $\frac{1}{p(z)} = c$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$ a nějaké $c \in \mathbb{C}$, tj. p je konstantní, což je spor $\lightning$. ∎

8. Laurentova řada

Lemma 8.1

Nechť jsou dána čísla $z_0 \in \mathbb{C}$ a $a_{-n} \in \mathbb{C}$ pro $n \in \mathbb{N}$ a nechť

$$r := \limsup_{n\to\infty} |a_{-n}|^{1/n}.$$

Pak funkční řada

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} \tag{8.1}$$

konverguje absolutně a skoro stejnoměrně na množině $P(z_0, r, \infty) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| > r\}$ a diverguje na kruhu $K(z_0, r)$.

Definice 8.2

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a $a_n \in \mathbb{C}$ pro $n \in \mathbb{Z}$. Součet dvou komplexních funkčních řad

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

nazýváme *Laurentovou řadou se středem z_0 a koeficienty a_n*. Značíme ji

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \tag{8.2}$$

Řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ nazýváme *regulární částí* řady (8.2) a řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$ její *hlavní částí*. Řekneme, že Laurentova řada (8.2) konverguje v bodě $z \in \mathbb{C}$, jestliže v tomto bodě konverguje její regulární i hlavní část. Jestliže alespoň jedna z těchto částí diverguje, pak také Laurentova řada (8.2) diverguje.

Věta 8.3

Pro každou Laurentovu řadu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ s netriviálním oborem konvergence existují dvě čísla $0 \leqslant r < R \leqslant \infty$ taková, že tato řada konverguje absolutně a skoro stejnoměrně na $P(z_0, r, R)$ a diverguje na $\widetilde{\mathbb{C}} \setminus \overline{P(z_0, r, R)}$.

Věta 8.4

Nechť $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ je Laurentova řada s mezikružím konvergence $P(z_0, r, R)$ pro $0 \leqslant r < R \leqslant \infty$. Pak součet f této řady je funkce holomorfní v $P(z_0, r, R)$. Navíc platí

$$f'(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} (z - z_0)^n,$$

přičemž řada na pravé straně má opět mezikruží konvergence $P(z_0, r, R)$.

Věta 8.5 (*Laurent*)

Nechť jsou dána čísla $z_0 \in \mathbb{C}$ a $0 \leqslant r < R \leqslant \infty$ a nechť f je funkce holomorfní v $P(z_0, r, R)$. Pak existuje jediná Laurentova řada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ konvergentní v $P(z_0, r, R)$ se součtem f. Koeficienty této řady splňují

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{8.3}$$

kde $\gamma(t) = z_0 + \rho\, e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, přičemž číslo $\rho \in (r, R)$ je libovolné.

Věta 8.6 (*Cauchyho vzorec pro mezikruží*)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \leqslant r < R \leqslant \infty$ a nechť dále funkce f je holomorfní v $P(z_0, r, R)$. Je-li $\xi \in P(z_0, r, R)$ a $r < \rho < |\xi - z_0| < \sigma < R$, pak pro kružnice

$$\gamma(t) = z_0 + \rho\, e^{it}, \quad \varphi(t) = z_0 + \sigma\, e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

platí rovnost

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)}{z - \xi}\, dz - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - \xi}\, dz.$$

Důkaz Věty 8.6. Nechť je dáno $\xi \in P(z_0, r, R)$ a čísla ρ, σ splňující nerovnosti $r < \rho < |\xi - z_0| < \sigma < R$. Pak jistě existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $\overline{K(\xi, \varepsilon)} \subset P(z_0, r, R)$. Označme proto ještě kružnici $\delta(t) = \xi + \varepsilon\, e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Potom funkce $F(z) := \frac{f(z)}{z-\xi}$ je holomorfní na $P(z_0, \rho, \sigma) \setminus \overline{K(\xi, \varepsilon)}$ a spojitá na uzávěru této množiny. Tedy podle Věty 7.3B máme

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)}{z-\xi}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-\xi}\, dz + \frac{1}{2\pi i} \int_\delta \frac{f(z)}{z-\xi}\, dz. \tag{8.4}$$

Ovšem podle Věty 7.4 platí

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\delta \frac{f(z)}{z-\xi}\, dz = f(\xi),$$

což po dosazení do (8.4) dává požadovanou rovnost. ∎

Důkaz Věty 8.5. Důkaz rozdělíme na 3 části. Nejdříve dokážeme platnost (8.3).

(i) Nechť $\rho \in (r, R)$ je libovolné a $\gamma(t) = z_0 + \rho\, e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Připusťme, že funkci f můžeme v $P(z_0, r, R)$ vyjádřit pomocí Laurentovy řady, tj.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{pro všechna } z \in P(z_0, r, R). \tag{8.5}$$

Tato řada konverguje v $P(z_0, r, R)$ skoro stejnoměrně, a tudíž na grafu $[\gamma]$ konverguje hlavní i regulární část řady (8.5) stejnoměrně. Nyní vynásobíme obě strany rovnosti (8.5) výrazem $(z - z_0)^{-(k+1)}$ pro libovolné $k \in \mathbb{Z}$. Jestliže $z \in [\gamma]$, zůstane stejnoměrná konvergence Laurentovy řady na $[\gamma]$ zachována i v případě, že s výrazem $(z - z_0)^{-(k+1)}$ půjdeme za znamení sumace, tj. př násobení člen po členu, neboť $(z - z_0)^{-(k+1)}$ je ohraničenou a spojitou funkcí na $[\gamma]$. Pak tedy máme

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-k-1} \quad \text{pro všechna } z \in [\gamma]. \tag{8.6}$$

Integrujeme-li nyní obě strany (8.6) podél γ, pak můžeme díky stejnoměrné konvergenci zaměnit pořadí integrace a sumace, viz Důsledek 7.8B, čímž dostaneme

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-k-1} \right) dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{(z - z_0)^{k+1-n}}\, dz.$$

Jenže $\int_\gamma \frac{dz}{(z-z_0)^{k+1-n}} = 0$ kdykoli $k + 1 - n \neq 1$, tj. pro každé $n \in \mathbb{Z} \setminus \{k\}$. Zbývá tedy pouze člen pro $n = k$, který je roven a_k, neboť

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\, dz = a_k \times \frac{1}{2\pi i} \times \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = a_k.$$

Tato rovnost platí pro libovolné $k \in \mathbb{Z}$. Proto v případě, že existuje Laurentova řada pro funkci f, jsou její koeficienty dány vztahem (8.3).

(ii) Nyní ukážeme jednoznačnost vyjádření a_n pomocí (8.3). Společně s γ uvažme také kružnici $\varphi(t) = z_+ + \sigma\, e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, pro libovolné $\sigma \in (r, R)$ a $\sigma \neq \rho$. Pak funkce $\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$ je holomorfní na $P(z_0, \min\{\sigma, \rho\}, \max\{\sigma, \rho\})$ a na jeho uzávěru je jistě spojitá. Pak ale podle Věty 7.3B platí

$$\int_\varphi \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{Z}. \tag{8.7}$$

Proto koeficienty a_n, $n \in \mathbb{Z}$, dané vztahem (8.3) nezávisí na volbě poloměru $\rho \in (r, R)$, tj. jsou skutečně dány jednoznačně. Tedy existuje nejvýše jedna Laurentova řada splňující (8.5).

(iii) Existenci alespoň jedné takové řady ukážeme nyní v závěrečné části. Důkaz je založen na Větě (8.6) a rozvoji výrazu $\frac{1}{z-\xi}$ do geometrické řady s mocninami $(z-z_0)^n$. Nechť $\xi \in P(z_0, r, R)$ je libovolné. Pak jistě existují čísla ρ_ξ, σ_ξ taková, že $r < \rho_\xi < |z - z_0| < \sigma_\xi < R$, a tedy podle Věty 8.6 platí rovnost

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_\xi} \frac{f(z)}{z-\xi}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\xi} \frac{f(z)}{z-\xi}\,dz \tag{8.8}$$

pro $\gamma_\xi(t) = z_+ + \rho_\xi\, e^{it}$ a $\varphi_\xi(t) = z_+ + \sigma_\xi\, e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Pro každé $z \in \mathbb{C}$ splňující $|z - z_0| > |\xi - z_0|$ plyne pomocí součtu geometrické řady

$$\begin{aligned}\frac{f(z)}{z-\xi} = \frac{f(z)}{(z-z_0)-(\xi-z_0)} = \frac{f(z)}{z-z_0}\times\frac{1}{1-\frac{\xi-z_0}{z-z_0}} = \frac{f(z)}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\xi-z_0}{z-z_0}\right)^n = \\ = f(z)\sum_{n=0}^{\infty}(\xi-z_0)^n \times \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}},\end{aligned}$$

přičemž řada na pravé straně konverguje stejnoměrně. Tato rovnost je splněna zejména pro každé $z \in [\varphi_\xi]$, neboť v takovém případě máme $|z - z_0| = \sigma_\xi > |\xi - z_0|$. Ovšem na $[\varphi_\xi]$ je funkce $f(z)$ ohraničená a spojitá, takže stejnoměrná konvergence zůstane zachována i ve chvíli, kdy roznásobíme sumu člen po členu, tj. vstoupíme s $f(z)$ za znamení sumace, což dává

$$\frac{f(z)}{z-\xi} = \sum_{n=0}^{\infty}(\xi-z_0)^n \times \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}.$$

Potom integrováním obou stran podél φ_ξ dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_\xi}\frac{f(z)}{z-\xi}\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_\xi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(\xi-z_0)^n\times\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\right)dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(\xi-z_0)^n\int_{\varphi_\xi}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(\xi-z_0)^n\int_{\gamma_\xi}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz,\end{aligned} \tag{8.9}$$

kde nám stejnoměrná konvergence umožnila v předposledním kroku aplikovat Důsledek 7.8B, tj. integrovat člen po členu, zatímco poslední krok plyne ze druhé části důkazu a rovnosti (8.7).

Podobně pro každé $z \in \mathbb{C}$ splňující $|z - z_0| < |\xi - z_0|$ platí

$$\frac{f(z)}{z-\xi} = \frac{f(z)}{(z-z_0)-(\xi-z_0)} = -\frac{f(z)}{\xi-z_0} \times \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}} = -\frac{f(z)}{\xi-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^n =$$
$$= -f(z) \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \times \frac{1}{(\xi-z_0)^{n+1}},$$

přičemž řada na pravé straně konverguje stejnoměrně. Tato rovnost je splněna zejména pro každé $z \in [\gamma_\xi]$, neboť v takovém případě máme $|z - z_0| = \rho_\xi < |\xi - z_0|$. Ovšem na $[\gamma]$ je opět funkce $f(z)$ ohraničená a spojitá, takže můžeme násobit člen po členu se zachováním stejnoměrné konvergence. Poté integrováním obou stran podél γ_ξ dostaneme

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\xi} \frac{f(z)}{z-\xi}\,dz = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\xi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \times \frac{f(z)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\right) dz =$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty} (\xi-z_0)^{-n-1} \int_{\gamma_\xi} f(z)\,(z-z_0)^n\,dz =$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=-\infty}^{-1} (\xi-z_0)^j \int_{\gamma_\xi} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{j+1}}\,dz. \tag{8.10}$$

Zkombinováním rovností (8.8), (8.9) a (8.10) získáme

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_\xi} \frac{f(z)}{z-\xi}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\xi} \frac{f(z)}{z-\xi}\,dz =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty} (\xi-z_0)^n \int_{\gamma_\xi} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=-\infty}^{-1} (\xi-z_0)^j \int_{\gamma_\xi} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{j+1}}\,dz =$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,(\xi-z_0)^n,$$

kde $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\xi} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$. Koeficienty a_n v tuto chvíli ještě formálně závisejí na zvoleném ξ, jenže podle rovnosti (8.6) ve druhé části důkazu platí

$$\int_{\gamma_\xi} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

pro všechna $n \in \mathbb{Z}$ a pro $\gamma(t) = z_0 + \rho\,e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, s libovolným $\rho \in (r, R)$. Jelikož $\xi \in P(z_0, r, R)$ bylo zvoleno libovolně, plyne odtud, že existuje (alespoň jedna) Laurentova řada splňující (8.5), přičemž ro její koeficienty platí (8.3).

■

Definice 8.7

Nechť funkce f je holomorfní v $P(z_0, r, R)$ pro nějaké $z_0 \in \mathbb{C}$ a $0 \leqslant r < R \leqslant \infty$. Laurentovu

řadu z Věty 8.5 nazýváme *Laurentovým rozvojem funkce* f *v* $P(z_0, r, R)$. Koeficienty a_n určené rovností (8.3) nazýváme *Laurentovými koeficienty funkce* f *v* $P(z_0, r, R)$.

Definice 8.8

Nechť $a_n \in \mathbb{C}$ pro $n \in \mathbb{Z}$. *Laurentovou řadou se středem v* ∞ a koeficienty a_n rozumíme řadu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$. Řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ nazýváme její *regulární částí* a řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n}$ její *hlavní částí*.

Věta 8.9 (*Cauchyho nerovnost pro koeficienty Laurentova rozvoje*)

Nechť funkce f *má Laurentův rozvoj* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ *v mezikruží* $P(z_0, r, R)$ *pro* $0 \leqslant r < R \leqslant \infty$. *Pak platí*

$$|a_n| \leqslant \rho^{-n} \times \max_{|z-z_0|=\rho} |f(z)|$$

pro libovolné $n \in \mathbb{Z}$ *a* $\rho \in (r, R)$.

Důkaz. Ne. ∎

9. Teorie reziduí

$$P(z_0, R) := \begin{cases} P(z_0, 0, R), & \text{je-li } z_0 \in \mathbb{C}, \\ \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1/R\}, & \text{je-li } z_0 = \infty. \end{cases}$$

Definice 9.1

Bod $z_0 \in D \subseteq \widetilde{\mathbb{C}}$ se nazývá *izolovanou singularitou* funkce $f : D \to \widetilde{\mathbb{C}}$, jestliže f není holomorfní v z_0 a současně existuje $0 < R \leqslant \infty$ takové, že f je holomorfní pro každé $z \in P(z_0, R) \subseteq D$.

Definice 9.2

Izolovaná singularita $z_0 \in D$ funkce $f : D \to \widetilde{\mathbb{C}}$ se nazývá:

(i) *odstranitelnou singularitou*, jestliže všechny koeficienty hlavní části Laurentova rozvoje funkce f holomorfní v $P(z_0, R) \subseteq D$ jsou nulové, tj. $a_{-n} = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

(ii) *pólem řádu* k, kde $k \in \mathbb{N}$, jestliže $a_{-k} \neq 0$ a $a_{-n} = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ splňující $n > k$, tj. od indexu $-k-1$ jsou všechny koeficienty v hlavní části Laurentova rozvoje nulové. V případě $k = 1$ hovříme o *jednoduchém pólu*.

(iii) *podstatnou singularitou*, jestliže $a_{-n} \neq 0$ pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$.

Póly a podstatné singularity souhrnně označuje jako *neodstranitelné singularity*.

Věta 9.3 (*„Riemann“*)

Nechť $z_0 \in D \subseteq \widetilde{\mathbb{C}}$ *je izolovanou singularitou funkce* $f : D \to \widetilde{\mathbb{C}}$. *Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) Bod z_0 *je odstranitelná singularita.*

(ii) *Lze definovat funkční hodnotu* $f(z_0)$ *tak, že funkce* f *je holomorfní v okolí bodu* z_0.

(iii) *Existuje vlastní limita* $\lim_{z\to z_0} f(z)$.

(iv) *Existuje* $r > 0$ *takové, že funkce* f *je ohraničená v* $P(z_0, r) \subseteq D$.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $z_0 \in \mathbb{C}$, neboť případ $z_0 = \infty$ převedeme transformací $z \rightsquigarrow 1/z$ na případ $z_0 = 0$.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Je-li $a_{-n} = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, pak $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ pro všechna $z \in P(z_0, R) \subseteq D$. Položíme-li $f(z_0) := a_0$, pak rovnost $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ bude platit pro všechna $z \in K(z_0, R)$. Tedy podle Věty 4.9 je funkce f holomorfní v $K(z_0, R) \subseteq D$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Zřejmé.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Zřejmé.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Je-li $|f(z)| \leqslant K$ pro všechna $z \in P(z_0, r)$ a nějaké $K \geqslant 0$, pak pro $\gamma(t) = z_0 + \rho\, e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ a $0 < \rho < r$, je podle Věty 8.9 splněna nerovnost

$$|a_n| \leqslant \rho^{-n} \max_{|z-z_0|=\rho} |f(z)| \leqslant K \rho^{-n}.$$

Jelikož tato nerovnost má platit pro libovolné $\rho \in (0, r)$, musí být $a_{-n} = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, neboť $a_n \to 0$ pro $\rho \to 0$ a $n < 0$. ∎

Důsledek 9.4

(i) *Nechť* $z_0 \in D \subseteq \widetilde{\mathbb{C}}$ *a funkce* $f : D \to \mathbb{C}$ *je holomorfní v nějakém* $P(z_0, R) \subseteq D$. *Má-li funkce* f *v bodě* z_0 *odstranitelnou singularitu, pak funkce*

$$\widetilde{f}(z) := \begin{cases} \lim_{z\to z_0} f(z), & z = z_0, \\ f(z), & z \in P(z_0, R), \end{cases}$$

je holomorfní v $K(z_0, R)$, *tj. právě tímto předefinováním* $f(z_0)$ *dostaneme funkci holomorfní v* z_0.

(ii) *Nechť funkce* $f : D \to \widetilde{\mathbb{C}}$ *je spojitá a konečná v bodě* $z_0 \in D \subseteq \widetilde{\mathbb{C}}$. *Jestliže existuje prstencové okolí* $P(z_0, R) \subseteq D$ *takové, že* f *je holomorfní v* $P(z_0, R)$, *pak* f *je holomorfní i v* z_0.

Důkaz. (i) Podle Věty 9.3(ii) lze předefinovat $f(z_0)$ tak, aby f byla holomorfní v $K(z_0, R)$. Ovšem holomorfnost implikuje spojitost, proto jedinou možností je volba $f(z_0) := \lim_{z\to z_0} f(z)$, což je díky Větě 9.3(iii) zcela korektní.

(ii) Připusťme, že funkce f není v z_0 holomorfní. Pak z_0 je izolovanou singularitou. Současně ze spojitosti a konečnosti v z_0 plyne existence vlastní limity v z_0 a rovnost $f(z_0) = \lim_{z\to z_0} f(z)$. Tedy podle Věty 9.3(iii) je z_0 odstranitelnou singularitou a z právě dokázané části (i) vyplývá holomorfnost také v z_0, což je spor ↯.

∎

Věta 9.5 (*Liouville #2*)

Je-li $f : \widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}$ celá funkce, která je holomorfní v ∞ nebo zde má odstranitelnou singularitu, pak f je konstantní funkcí na $\mathbb{C}$ (v prvním případě dokonce na $\widetilde{\mathbb{C}}$ a ve druhém případě ji lze díky Důsledku 9.4(i) předefinovat tak, aby byla konstantní na $\widetilde{\mathbb{C}}$).

Důkaz. Z Věty 9.3(iv) plyne, že existuje $r > 0$ takové, že f je ohraničená na prstencovém okolí $P(z_0, r)$. Poněvadž $\mathbb{C}\setminus P(\infty, r)$ je kompaktní množina v metrickém prostoru $(\mathbb{C}, d)$ a f je zde spojitá, musí zde být f také ohraničená. Tudíž nutně je funkce ohraničená na celém $\mathbb{C}$ (neboť r mohu libovolně zvětšovat) a podle Věty 7.13 je funkce f konstantní na $\mathbb{C}$, což vzhledem ke spojitosti (je-li holomorfní v ∞) implikuje konstantnost na $\widetilde{\mathbb{C}}$, zatímco v případě odstranitelné singularity může být hodnota v ∞ jiná — tomu ale lze snadno zabránit vhodným předefinováním v souladu s Důsledkem 9.4(i). ∎

Věta 9.6 (*l'Hospital v komplexním oboru*)

Nechť $z_0 \in \widetilde{\mathbb{C}}$ a funkce f, g jsou holomorfní v prstencovém okolí $P(z_0, R)$ pro nějaké $R > 0$. Jestliže

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = 0 = \lim_{z\to z_0} g(z)$$

a $g \not\equiv 0$ na $P(z_0, R)$, pak existuje)vlastní/nevlastní) limita

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)}$$

a platí

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Důkaz. Nechť nejdříve $z_0 \in \mathbb{C}$ a $f \not\equiv 0$ na $P(z_0, R)$ (jinak je tvrzení triviální). Funkce f, g mají v bodě z_0 (viz Věta 9.3), takže bez újmy na obecnosti (viz Důsledek 9.4) můžeme předpokládat jejich holomorfnost v z_0 a $f(z_0) = 0 = g(z_0)$. Pak z Taylorových rozvojů těchto funkcí v bodě z_0 (resp. na nějakém jejich okolí, viz Věta 7.8) plyne existence funkcí h_1, h_2, které jsou holomorfní v z_0, splňují $h_1(z_0) \neq 0$, $h_2(z_0) \neq 0$ a

$$f(z) = (z - z_0)^m h_1(z) \quad \& \quad g(z) = (z - z_0)^n h_2(z)$$

pro nějaké $m, n \in \mathbb{N}$ (proč?). Potom platí

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{(z - z_0)^m h_1(z)}{(z - z_0)^n h_2(z)} = \begin{cases} 0, & m > n, \\ \infty, & m < n, \\ \frac{h(z_0)}{g(z_0)}, & m = n. \end{cases}$$

Současně také máme

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{m(z-z_0)^{m-1}h_1(z)+(z-z_0)^m h_1'(z)}{n(z-z_0)^{n-1}h_2(z)+(z-z_0)^n h_2'(z)}$$
$$=\lim_{z\to z_0}\left[\frac{(z-z_0)^{m-1}}{(z-z_0)^{n-1}}\times\frac{m h_1(z)+(z-z_0)h_1'(z)}{n h_2(z)+(z-z_0)h_2'(z)}\right]=\begin{cases}0, & m>n,\\ \infty, & m<n,\\ \frac{h(z_0)}{g(z_0)}, & m=n,\end{cases}$$

což dokazuje platnost tvrzení.

Je-li $z_0=\infty$, dostaneme z předchozí části pro $s=1/z$ a $s_0=1/z_0=0$ a pravidla pro (komplexní) derivování složené funkce (viz Větu 3.3) rovnost

$$\lim_{z\to\infty}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{s\to 0}\frac{f(1/s)}{g(1/s)}=\lim_{s\to 0}\frac{-s^2f'(1/s)}{-s^2g(1/s)}=\lim_{s\to 0}\frac{f'(1/s)}{g(1/s)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)},$$

čímž je důkaz hotov. ∎

Bod z_0 je *n-násobným nulovým bodem funkce* f, která je holomorfní v z_0 a není identicky nulová na nějakém okolí z_0, jestliže $f(z_0)=f'(z_0)=\cdots=f^{(n-1)}(z_0)=0$ a $f^{(n)}(z_0)\neq 0$. Tato podmínka je ekvivalentní s tím, že v nějakém okolí z_0 je možné funkci f vyjádřit jako $f(z)=(z-z_0)^n g(z)$ pro nějakou holomorfní funkci g splňující $g(z_0)\neq 0$ (proč? vivat Taylor!).

Bod $z_0=\infty$ *je n-násobným nulovým bodem funkce* f, která je holomorfní v ∞ a není identicky nulová v nějakém jeho okolí, pokud $s_0=0$ je n-násobným nulovým bodem funkce $f(1/s)$.

Věta 9.7

Nechť $n\in\mathbb{N}$ a $z_0\in D\subseteq\widetilde{\mathbb{C}}$ je izolovanou singularitou funkce $f:D\to\widetilde{\mathbb{C}}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.

(i) bod z_0 je pólem řádu n,

(ii) a) v nějaké prstencovém okolí $P(z_0,r)\subseteq D$ bodu $z_0\in\mathbb{C}$ platí

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^n},$$

kde g je holomorfní funkce v $K(z_0,r)$ a $g(z_0)\neq 0$,

b) v případě $z_0=\infty$ máme

$$f(z)=z^n g(z),$$

kde g je holomorfní a nenulová v ∞,

(iii) existuje $K(z_0,\tilde r)\subseteq D$ a funkce h holomorfní v $K(z_0,\tilde r)$ taková, že $h(z)\neq 0$ pro všechna $z\in P(z_0,\tilde r)$, bod z_0 je jejím n-násobným nulovým bodem a $f=1/h$ pro všechna $z\in P(z_0,\tilde r)$.

Důkaz. Uvážíme pouze $z_0\in\mathbb{C}$, neboť případ $z_0=\infty$ se substitucí $s=1/z$ převede na situaci $z_0=0$.

(i)⇒(ii) Nechť z_0 je pólem řádu n funkce f. Potom v jistém prstencovém okolí $P(z_0, r)$ platí

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z - z_0)^n,$$

přičemž $a_{-n} \neq 0$. Odtud také plyne

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^n} \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k+n} = \frac{1}{(z-z_0)^n} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-n} (z-z_0)^k,$$

takže platí

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^n},$$

kde $g(z) \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-n} (z-z_0)^k$ je holomorfní funkce v $K(z_0, r)$ a $g(z_0) = a_{-n} \neq 0$ (vivat Taylor!).

(ii)⇒(iii) Protože $g(z_0) \neq 0$ a g je holomorfní v $K(z_0, r)$, existuje $K(z_0, \tilde{r}) \subseteq D$, takové, že $\tilde{r} \in (0, r]$ a $g(z) \neq 0$ v $K(z_0, \tilde{r})$, a tedy $1/g$ je holomorfní v $K(z_0, \tilde{r})$. Potom funkce $h(z) \coloneqq \frac{(z-z_0)^n}{g(z)}$ je holomorfní v $K(z_0, \tilde{r})$ (jakožto součin dvou holomorfních funkcí), $h(z) \neq 0$ pro všechna $z \in P(z_0, \tilde{r})$, bod z_0 je n-násobným nulovým bodem a $f = 1/h$ pro všechna $z \in P(z_0, \tilde{r})$.

(iii)⇒(i) Nechť $f = 1/h$, kde h má n-násobný nulový bod v z_0. Protože h není identicky nulová v $K(z_0, \tilde{r})$ a je zde holomorfní, existuje funkce g holomorfní v nějakém $K(z_0, \hat{r})$, $\hat{r} \in (0, \tilde{r}]$, taková, že $h(z) = (z - z_0)^n g(z)$ v tomto okolí a $g(z_0) \neq 0$. Pak tedy

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^n} \times \frac{1}{g(z)} \quad \text{pro všechna} \quad z \in P(z_0, \hat{r}). \tag{9.1}$$

Ovšem funkce $1/g$ je také holomorfní na nějakém $K(z_0, r)$, $r \in (0, \hat{r}]$, a proto podle Věty 7.8 platí $1/g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ pro všechna $z \in K(z_0, r)$, přičemž $a_0 = 1/g(z_0) \neq 0$. Pak ale z (9.1) dostáváme

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^n} \times \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k-n} = \sum_{k=-n}^{\infty} a_{k+n} (z-z_0)^k$$

pro všechna $z \in P(z_0, r)$, takže bod z_0 je pólem řádu n.

■

Věta 9.7A

Je-li f holomorfní v $D\setminus\{z_0\}$ a f' má pól řádu n v z_0, pak $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ a f má pól řádu $n-1$ v z_0.

Věta 9.8 (*Casorati–Weierstrass*)

Nechť $f : D \subseteq \widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}$ má v bodě $z_0 \in D$ izolovanou singularitu. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.

(i) bod z_0 je podstatnou singularitou funkce f,

(ii) obraz „libovolně malého" prstencového okolí $P(z_0, r) \subseteq D$ *je hustá množina v* $\widetilde{\mathbb{C}}$*, tj.*

$$\overline{f(P(z_0, r))} = \widetilde{\mathbb{C}}, \tag{9.2}$$

(iii) existuje posloupnost $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ *taková, že* $z_n \in D\backslash\{z_0\}$ *pro* $n \in \mathbb{N}$*,* $z_n \to z_0$ *pro* $n \to \infty$ *a posloupnost* $\{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ *nemá limitu v* $\widetilde{\mathbb{C}}$*.*

Důkaz. Implikace (ii) ⇒ (iii) ⇒ (i) jsou zřejmé (viz také konec důkazu) a stačí tedy pouze ukázat (i) ⇒ (ii). Jelikož opět $z_0 = \infty$ můžeme převést pomocí substituce $s = 1/z$ na bod $z_0 = 0$, můžeme se bez újmy na obecnosti omezit pouze na případ $z_0 \in \mathbb{C}$. Připusťme, že existuje $P(z_0, r) \subseteq D$ takové, že $f(P(z_0, r))$ není hustá množina v $\widetilde{\mathbb{C}}$, tj. neplatí (9.2). Pak $\widetilde{\mathbb{C}}\backslash\overline{f(P(z_0, r))}$ je neprázdná otevřená množina, takže existuje $\omega_0 \in \mathbb{C}$ (nelze $\widetilde{\mathbb{C}}\backslash\overline{f(P(z_0, r))} = \{\infty\}$?) a $\varepsilon > 0$ tak, že

$$K(\omega_0, \varepsilon) \subseteq \widetilde{\mathbb{C}}\backslash\overline{f(P(z_0, r))} \subseteq \widetilde{\mathbb{C}}\backslash f(P(z_0, r)),$$

tj. $K(\omega_0, \varepsilon) \cap f(P(z_0, r)) = \varnothing$. Pak $|f(z) - \omega_0| \geqslant \varepsilon > 0$ pro všechna $z \in P(z_0, r)$. Proto funkce $g(z) := \frac{1}{f(z)-\omega_0}$ je holomorfní v $P(z_0, r)$ a platí zde $|g(z)| \leqslant 1/\varepsilon$, tj. je ohraničená v $P(z_0, r)$. Tudíž bod z_0 je odstranitelnou singularitou funkce g podle Věty 9.3(iv), a tedy platí

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{pro všechna } z \in P(z_0, r).$$

Položíme-li $g(z) := a_0$,pak funkce g je holomorfní v $K(z_0, r)$ (viz Důsledek 9.4). Nyní mohou nastat dvě možnosti:

(i) Je-li $a_0 \neq 0$, pak $g(z_0) \neq 0$, a tedy funkce $1/g$ je holomorfní v nějakém $K(z_0, \tilde{r})$ pro $\tilde{r} \in (0, r]$. Z definice funkce g plyne, že v takovém případě má ale také funkce f v bodě z_0 odstranitelnou singularitu, neboť

$$f(z) = \omega_0 + \frac{1}{g(z)} \quad \text{pro všechna } z \in K(z_0, \tilde{r}), \tag{9.3}$$

což je spor ↯.

(ii) Je-li $a_0 = 0$ a $n \in \mathbb{N}$ nejmenší číslo, pro které $a_n \neq 0$, pak platí

$$g(z) = (z - z_0)^n \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-n} = (z - z_0)^n \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n} (z - z_0)^k = (z - z_0)^n h(z),$$

kde $h(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n} (z - z_0)^k$ je funkce holomorfní v nějakém $K(z_0, \tilde{r})$ (vivat Taylor!) a současně $h(z_0) = a_n \neq 0$. Pak tedy z_0 je n-násobným nulovým bodem funkce g, takže podle Věty 9.7(iii) má funkce $1/g$ v bodě z_0 pól řádu n. Jenže v takovém případě má také funkce f v bodě z_0 pól řádu n, neboť opět platí (9.3), a to je spor ↯. Tím je důkaz hotov.

(Implikace (ii) ⇒ (iii) plyne z definice limity: $\mathcal{O}_\delta(z_0) \rightsquigarrow \mathcal{O}_\varepsilon(L)$, tedy obraz okolí je opět nějaké okolí, a to jistě není hustá množina v $\widetilde{\mathbb{C}}$.) ∎

Věta 9.9 (*velká Picardova*)

Nechť $z_0 \in D \subseteq \widetilde{\mathbb{C}}$ *je podstatná singularita funkce* $f : D \to \mathbb{C}$*. Pak na každém prstencovém*

okolí bodu z_0 nabývá nekonečněkrát všech hodnot z $\mathbb{C}$ s výjimkou nejvýše jedné.

Důkaz. Ne. ∎

Liouville byl lidumil,
zato Picard přitvrdil,
jeho věty pochvalme,
i když známe z analýzy reálné
$1/x \sin(1/x)$,
on dokázal mnohem víc,
byl komplexní strýc.

(Báseň od J. Frýdka)

Toto je obrovské zesílení Věty 7.14 i Věty 9.8(ii), neboť:

Je-li $z_0 \in \widetilde{\mathbb{C}}$ podstatnou singularitou, pak existují $r > 0$ a $\omega \in \widetilde{\mathbb{C}}$ taková, že pro všechna prstencová okolí $P(z_0, \tilde{r})$, $\tilde{r} \in (0, r)$, je

$$f(P(z_0, \tilde{r})) = \mathbb{C} \setminus \{\omega\},$$

přičemž jednobodová množina $\{\omega\}$ nezávisí na volbě $\tilde{r}$.

Definice 9.10

Nechť funkce f je holomorfní v prstencovém okolí $P(z_0, R)$ pro $z_0 \in \mathbb{C}$ a $R > 0$. Koeficient a_{-1} v Laurentově rozvoji funkce f v $P(z_0, R)$, tj.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

nazýváme *reziduem funkce f v bodě z_0* a značíme $\operatorname{res}_{z_0} f$.

Je-li funkce f holomorfní v nějakém prstencovém okolí $P(\infty, R)$, kde $R > 0$, pak *reziduum funkce f v ∞* je definováno jako

$$\operatorname{res}_{\infty} f := -a_1,$$

kde a_1 je koeficient v Laurentově rozvoji funkce f v $P(\infty, R)$, tj.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{-n}.$$

Věta 9.11

Nechť f, g jsou holomorfní v nějakém prstencovém okolí bodu $z_0 \in \widetilde{\mathbb{C}}$. Pak pro libovolné $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ platí

$$\operatorname{res}_{z_0}(\alpha f + \beta g) = \alpha \operatorname{res}_{z_0} f + \beta \operatorname{res}_{z_0} g.$$

Důkaz. Přímo z definice. ∎

Věta 9.12

Nechť funkce $f : D \subseteq \widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}$ *má v bodě* $z_0 \in D$ *pól řádu* n. *Pak platí*

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \begin{cases} \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to z_0} \left[(z-z_0)^n f(z)\right]^{(n-1)}, & z_0 \in \mathbb{C}, \\ -\frac{1}{(n+1)!} \lim_{z\to 0} \left[z^n f(1/z)\right]^{(n+1)}, & z_0 = \infty. \end{cases}$$

Důkaz. Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je pól řádu n. Potom v jistém prstencovém okolí bodu z_0 máme Laurentův rozvoj

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z-z_0)^k.$$

Potom

$$(z-z_0)^n f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k+n} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-n} (z-z_0)^k.$$

Na pravé straně nyní máme Taylorův rozvoj nějaké funkce g, která je holomorfní v jistém okolí bodu z_0 (viz Věta 9.7). Pak ale můžeme tuto funkci libovolněkrát derivovat, což zejména dává

$$\begin{aligned} \left[(z-z_0)^n f(z)\right]^{(n-1)} &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_{k-n} (z-z_0)^k\right]^{(n-1)} = \left[\sum_{k=1}^{\infty} k\, a_{k-n} (z-z_0)^{k-1}\right]^{(n-2)} = \\ &= \left[\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\, a_{k-n} (z-z_0)^{k-2}\right]^{(n-3)} = \cdots = \\ &= \sum_{k=n-1}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+2)\, a_{k-n} (z-z_0)^{k-n+1} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+n-1)(k+n-2)\cdots 2\cdot 1\, a_{k-1} (z-z_0)^k. \end{aligned} \tag{9.4}$$

Z rovnosti $\left[(z-z_0)^n f(z)\right]^{(n-1)} = g^{(n-1)}(z)$ a holomorfnosti (stačila by spojitost) funkce $g^{(n-1)}$ v $K(z_0, r)$ vyplývá

$$\lim_{z\to z_0} \left[(z-z_0)^n f(z)\right]^{(n-1)} = \lim_{z\to z_0} g^{(n-1)}(z) = g^{(n-1)}(z_0) \overset{(9.4)}{=} (n-1)(n-2)\cdots 1\, a_{-1} = (n-1)!\operatorname{res}_{z_0} f,$$

z čehož plyne tvrzení.

Je-li $z_0 = \infty$, potom v nějakém prstencovém okolí ∞ platí

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k z^{-k},$$

takže v jistém prstencovém okolí bodu 0 máme

$$f(1/z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k z^k.$$

Odtud plyne

$$z^n f(1/z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k z^{k+n} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-n} z^k.$$

Na pravé straně máme Taylorův rozvoj funkce holomorfní v $K(0,r)$ (opět podle Věty 9.7). Proto

$$\left[z^n f(1/z)\right]^{(n+1)} = \sum_{k=n+1}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n)\, a_{k-n} z^{k-n-1}.$$

Pak ze stejných důvodů jako v předchozí části máme

$$\lim_{z\to 0}\left[z^n f(1/z)\right]^{(n+1)} = (n+1)n\cdots 1\cdot a_1 = (n+1)!\,(-\operatorname{res}_\infty f),$$

z čehož vyplývá požadované tvrzení. ∎

Zejména v případě jednoduchého pólu dostáváme formuli pro výpočet rezidua

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \begin{cases} \lim_{z\to z_0}[(z-z_0)f(z)], & z_0 \in \mathbb{C}, \\ -\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}[z f(1/z)]'', & z_0 = \infty. \end{cases} \tag{9.5}$$

Důsledek 9.13

(i) Nechť funkce h, g jsou definované v okolí $z_0 \in \mathbb{C}$, přičemž funkce h je holomorfní v z_0 a funkce g má v bodě z_0 jednoduchý pól. Potom

$$\operatorname{res}_{z_0}(hg) = h(z_0)\operatorname{res}_{z_0} g.$$

(ii) Jsou-li funkce h, g definované v okolí $z_0 \in \mathbb{C}$ a holomorfní v tomto bodě, přičemž $h(z_0) = 0 \neq h'(z_0)$. Potom

$$\operatorname{res}_{z_0}\frac{g}{h} = \operatorname{res}_{z_0}\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Důkaz.

(i) Je-li $h(z_0) = 0$, pak bod z_0 je odstranitelnou singularitou funkce hg, a tedy uvedený vzorec jistě platí (neboť potom $\operatorname{res}_{z_0} hg = 0$). Nechť $h(z_0) \neq 0$. Pak z_0 je jednoduchý pól funkce hg, takže podle (9.5) platí

$$\operatorname{res}_{z_0}(hg) = \lim_{z\to z_0}[(z-z_0)h(z)g(z)] = h(z_0)\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)g(z)] \overset{(9.5)}{=} h(z_0)\operatorname{res}_{z_0} g.$$

(ii) Je-li $g(z_0) = 0$, je bod z_0 odstranitelnou singularitou funkce g/h, a tedy uvedený vzorec jistě platí. Je-li $g(z_0) \neq 0$, pak z_0 je jednoduchým pólem funkce g/h a podle (9.5) máme

$$\operatorname{res}_{z_0} g/h = \lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)\frac{g(z)}{h(z)}\right] = g(z_0)\lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{h(z)-h(z_0)} = g(z_0)\frac{1}{\lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{h(z)-h(z_0)}} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

■

Věta 9.14 (*reziduová věta pro Jordanovu cestu*)

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast a γ je kladně orientovaná Jordanova cesta ležící v Ω. Nechť dále f je funkce holomorfní na množině $\Omega\backslash\{z_1,\dots,z_m\}$, kde $\{z_1,\dots,z_m\} \subseteq \operatorname{Int}\gamma$ a $m \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{res}_{z_k} f.$$

Důkaz. Označme $M := \{z_1,\dots,z_m\}$. Pro libovolné $k \in \{1,\dots,m\}$ je funkce f v nějakém prstencovém okolí $P(z_k, R_k)$, kde tudíž existuje Laurentův rozvoj funkce f (vivat Laurent!, viz Věta 8.5)

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{[k]} (z - z_k)^n, \quad z \in P(z_k, R_k).$$

Označme h_k a r_k hlavní a regulární části tohoto rozvoje. Jelikož hlavní část je konvergentní pro $|z - z_k| > 0$, je funkce $h_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}^{[k]} (z - z_k)^{-n}$ holomorfní na $\mathbb{C}\backslash\{z_k\}$ (viz Větu 8.4). Funkce $f - h_k$ je tedy jistě holomorfní na $\Omega\backslash M$ a navíc i v bodě z_k, neboť v $P(z_k, R_k)$ je dána konvergentní mocninnou řadou (=regulární část rozvoje=Taylorova řada)

$$f(z) - h_k(z) = r_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{[k]} (z - z_k)^n, \quad z \in P(z_k, R_k).$$

Odtud plyne, že funkce

$$g(z) := f(z) - \sum_{k=1}^{m} h_k(z)$$

je holomorfní na Ω ($f - h_1 - \cdots - h_m \Rightarrow f - h_k$ je holomorfní v z_k & h_j jsou holomorfní v z_k pro $j \in \{1,\dots,m\}\backslash\{k\}$). Podle Věty 7.1 (vivat Cauchy!) proto platí $\int_\gamma g(z)\,dz = 0$, neboli

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{m} \int_\gamma h_k(z)\,dz. \tag{9.6}$$

Ovšem současně platí také

$$\int_\gamma h_k(z)\,dz = \int_\gamma \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}^{[k]} (z - z_k)^{-n}\,dz.$$

Vzhledem ke stejnoměrné konvergenci „mocninné“ řady na pravé straně na množině $[\gamma]$ (viz Věta 8.3) můžeme zaměnit pořadí sumace a integrace (viz Důsledek 7.8B), tj.

$$\int_\gamma h_k(z)\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}^{[k]} \int_\gamma (z - z_k)^{-n}\,dz.$$

Protože pro $n = 2, 3, \dots$ existuje na oblasti $\Omega \setminus M$ primitivní funkce k funkci $(z - z_k)^{-n}$, platí vzhledem k Větě 6.18, že

$$\int_\gamma h_k(z)\,dz = a_{-1}^{[k]} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_k} = 2\pi i\, a_{-1}^{[k]},$$

neboli

$$\int_\gamma h_k(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z_k} f,$$

a tudíž z rovnosti (9.6) plyne

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{res}_{z_k} f.$$

■

Důsledek 9.15

Nechť f je holomorfní funkce na $\widetilde{\mathbb{C}} \setminus M$, kde $M \subseteq \widetilde{\mathbb{C}}$ je konečná množina. Pak platí

$$\sum_{z \in M \cup \{\infty\}} \operatorname{res}_{z_0} f = 0.$$

Důkaz. Je zřejmé, že můžeme vzít $M \cup \{\infty\} = M^* \cup \{\infty\}$ pro $M^* \subseteq \mathbb{C}$. Nechť tedy $M^* = \{z_1, \dots, z_m\}$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}$. Položme $R^* := \max\{|z_k| \mid k = 1, \dots, m\}$. Je-li $\rho \in (R^*, \infty)$ a $\gamma(t) = \rho\, e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, potom $\{z_1, \dots, z_m\} \subset \operatorname{Int}\gamma$ a podle Věty 9.14 platí

$$\sum_{k=1}^{m} \operatorname{res}_{z_k} f = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\,dz. \tag{9.7}$$

Také víme, že

$$\operatorname{res}_\infty f = -\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\,dz,$$

což dohromady s (9.7) dává

$$\sum_{z \in M^* \cup \{\infty\}} \operatorname{res}_{z_0} f = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_\gamma f(z)\,dz - \int_\gamma f(z)\,dz \right) = 0.$$

■

Příklad 9.1. Pomocí reziduí ukažte, že

(i) $\int_\gamma \frac{dz}{z(z-1)^2} = 2\pi i$, kde γ je kladně orientovaná kružnice se středem v počátku a poloměrem $1/2$;

(ii) $\int_\gamma \frac{e^z}{z(z^2+1)}\,dz = -\pi \sin 1 + i\pi(2 - \cos 1)$, kde γ je kladně orientovaná kružnice se středem v $-1 - i$ a poloměrem 2;

(iii) $\int_\gamma \frac{\sin z}{z^2 + iz}\,dz = 2\pi i \sinh 1$, kde γ je kladně orientovaná kružnice se středem v $-i$ a poloměrem 3;

(iv) $\int_\gamma \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}\,dz = 0$, kde γ je kladně orientovaná kružnice se středem v $-i$ a poloměrem 1;

(v) $\int_\gamma \frac{3+2\,e^{-z}}{e^z-1}\,dz = 10\pi i$, kde γ je kladně orientovaná kružnice se středem v počátku a poloměrem 2;

(vi) $\int_\gamma \frac{dz}{z^4+1} = -\pi i/\sqrt{2}$, kde γ je kladně orientovaná kružnice se středem v 1 a poloměrem 1;

(vii) $\int_\gamma \frac{z\,dz}{(z-1)(z-2)^2} = -2\pi i$, kde γ je kladně orientovaná kružnice se středem v 2 a poloměrem $1/2$;

(viii) $\int_\gamma \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)} = -\pi i/121$, kde γ je kladně orientovaná kružnice se středem v počátku a poloměrem 2;

(ix) $\int_\gamma \frac{dz}{(z^2-1)^2(z-3)^2} = 3\pi i/64$, kde γ je kladně orientovaná asteroida s parametrizací $\gamma(t) = 2\cos^3 t + 2i\sin^3 t$ pro $t \in [0, 2\pi]$;

(x) $\int_\gamma \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$, kde γ je kladně orientovaná kružnice se středem v $1+i$ a poloměrem 2;

▲

Nyní si ukážeme některé aplikace reziduové věty při výpočtu nevlastních integrálů přes neohraničený interval. Připomeňme a rozšiřme, že tím máme na mysli integrál definovaný jako

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{s\to\infty} \int_a^s f(x)\,dx \tag{9.8}$$

pro integrovatelnou (či dokonce spojitou) funkci $f : [a, \infty) \to \mathbb{C}$, kde $a \in \mathbb{R}$. Existuje-li vlastní limita na pravé straně (9.8), pak nevlastní integrál *konverguje*. V opačném případě *diverguje*. Analogicky definujeme nevlastní integrál $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$. Pro počítání s těmito integrály platí stejná pravidla jako v případě reálné funkce. Nevlastní integrál přes interval $(-\infty, \infty)$ definujeme jako

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx := \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx \tag{9.9}$$

pro libovolné $a \in \mathbb{R}$. Tento integrál je *konvergentní*, jestliže konvergují oba integrály na pravé straně. V případě konvergence můžeme brát také

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{r\to-\infty} \lim_{s\to\infty} \int_r^s f(x)\,dx. \tag{9.10}$$

Ovšem v případě divergentního integrálu už může být chování odlišné, např.

$$\int_{-\infty}^\infty x\,dx = \int_{-\infty}^a x\,dx + \int_a^\infty x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\infty}^a + \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^\infty = -\infty + \infty,$$

což je neurčitý výraz, zatímco

$$\lim_{r\to-\infty} \lim_{s\to\infty} \int_r^s x\,dx = \lim_{r\to-\infty} \lim_{s\to\infty} \left[\frac{x^2}{2}\right]_r^s = \lim_{r\to-\infty} \lim_{s\to\infty} \left(\frac{s^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right) = \infty.$$

Toto (a možné problémy s dvojnásobnými limitami) nás přivádí k otázce konvergence nevlastního integrálu přes $(-\infty,\infty)$ pomocí limit

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} f(x)\,dx \quad \text{nebo} \quad \lim_{t\to 0^+}\int_{-1/t}^{1/t} f(x)\,dx. \tag{9.11}$$

V případě existence vlastní limity v (9.11) hovoříme o *konvergenci ve smyslu hlavní hodnoty* a značíme pomocí zkratky „(v.p.)“. Potom jestliže nevlastní integrál konverguje v obvyklém smyslu, pak konverguje také ve smyslu hlavní hodnoty. Opačné tvrzení ovšem neplatí, jak např. ukazuje (v.p.) $\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx = 0$, zatímco $\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx$ diverguje.

Proč o konvergenci ve smyslu hlavní hodnoty hovoříme? Je to proto, že při aplikaci reziduové věty mnohdy získáme právě hodnotu nevlastního integrálu ve smyslu hlavní hodnoty, což ještě ale nemusí nic znamenat pro nevlastní integrál (9.9).

Byl to právě výpočet různých (vlastních i nevlastních) integrálů v reálném oboru, který byl hlavní motivací pro Cauchyho zájem o teorii funkcí komplexní proměnné. Počátky lze najít již v jeho memoárech z roku 1814, kde je uvažována např. integrál

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x^b}\,dx.$$

Někteří tomu však nepřikládali moc velký význam jako např. Poisson, který k tomuto poznamenal, že si „nevšiml žádného integrálu, který by již nebyl znám“. Nicméně tímto začala cesta k dnešní podobě teorie reziduí, jejíž skutečné základy lze najít u Cauchyho v roce 1826. Zde se také objevuje slovo *reziduum*, ale tehdejší definice je trochu komplikovaná. Ještě poznamenejme, že Cauchy pracoval především s funkcemi, které mají při nejhorším póly (k podstatným singularitám se dostává až v roce 1829).

Aplikací reziduové věty při výpočtu (nevlastních) integrálů lze najít celou řadu a není v našich silách zmínit vše. Nicméně základní princip těchto aplikací je založen na následujících 5 krocích:

(i) zaručení/existence zkoumaného integrálu – často totiž dostaneme jen integrál ve smyslu hlavní hodnoty. K tomu lze využít např. tvrzení, že integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ existuje, pokud $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ je spojitá a $x^k f(x)$ ohraničená na $[a,\infty)$ nebo $\lim_{x\to\infty} x^k f(x) < \infty$ pro nějaké $k > 1$.

(ii) volba vhodné komplexní funkce, kterou budeme integrovat.

(iii) volba vhodné křivky γ, podél které budeme integrovat, přičemž γ musí zahrnovat také původní reálný integrační interval a komplexní funkce musí být holomorfní na $\overline{\operatorname{Int}\gamma}$ s výjimkou izolovaných singularit.

(iv) odhady některých integrálů.

(v) výpočet potřebných reziduí.

Toto si ilustrujeme na následujícím příkladě.

Příklad 9.2. Vypočtěme integrál

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx$$

pro libovolné $m, n \in \mathbb{N}$ splňující $m < n$.

Řešení. Tento integrál existuje, neboť pro $k = 2$ máme

$$\lim_{x\to\infty} x^k f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 x^{m-1}}{1+x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{m+1}}{1+x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{m+1-n}}{x^{-n}+1} = \begin{cases} 1, & m+1 = n, \\ 0, & m+1 < n. \end{cases}$$

Funkce $f(z) := \frac{z^{m-1}}{1+z^n}$ má v bodech splňujících $z^n = -1$ póly řádu 1, tj. v bodech

$$z_k = \big[\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)\big]^{1/n} = \cos\left(\frac{-\pi+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi+2k\pi}{n}\right)$$

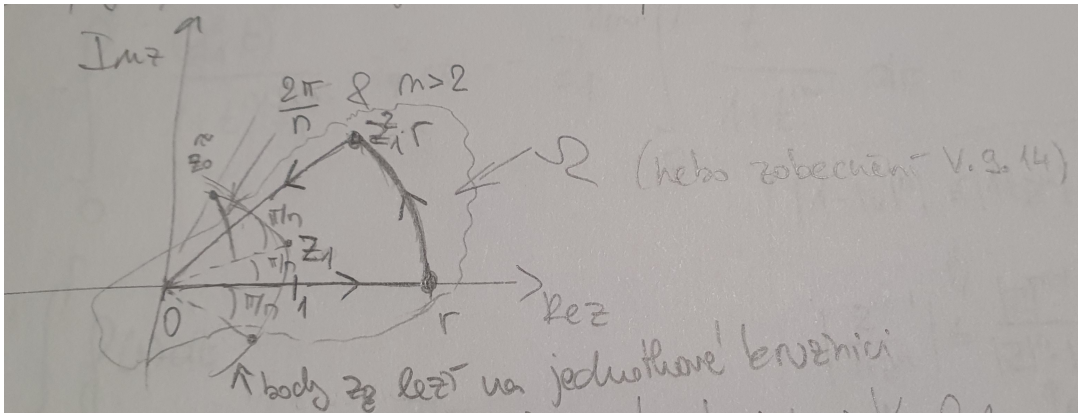
pro $k = 0, 1, \dots, n-1$, a tedy zejména pro $k = 1$ máme

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n} = e^{i\pi/n}.$$

Podle Důsledku 9.13(ii) platí

$$\operatorname{res}_{e^{i\pi/n}} \frac{z^{m-1}}{1+z^n} = \frac{\big[z^{m-1}\big]_{z=e^{i\pi/n}}}{\big[nz^{n-1}\big]_{z=e^{i\pi/n}}} = \frac{e^{i\pi(m-1)/n}}{n\,e^{i\pi(n-1)/n}} = \frac{1}{n}\,e^{i\pi(m-1-n+1)/n} =$$
$$= \frac{1}{n}\,e^{i\pi m/n}\,e^{-i\pi} = -\frac{1}{n}\,e^{i\pi m/n} = -\frac{1}{n}z_1^m.$$

Pro využití Věty 9.14 ještě potřebujeme najít vhodnou jednoduše souvislou oblast Ω a v ní Jordanovu cestu γ. Zvolíme např. kruhovou výseč obsahující z_1 a žádný jiný bod splňující $z^n = -1$, viz Obrázek 5.



Obrázek 5: Oblast Ω, křivka γ a body z_0, z_1 atd.

Cesta γ se pak skládá ze tří částí $\gamma = \gamma_1 \dotplus \gamma_2 \dotplus \gamma_3$, kde γ_1 je úsečka z 0 do r na reálné ose pro $r > 1$, γ_2 je oblouk kružnice se středem v počátku, poloměrem $r > 1$ a úhlem od 0 po $2\pi/n$

(neboť koncový bod je $z_1^2 r$, pro který platí $\arg(z_1^2 r) = \arg(z_1^2) = 2\pi/n$), γ_3 je přímka z bodu $z_1^2 r$ do počátku.

Za oblast Ω můžeme vzít „cokoli“ obsahující tuto výseč a neobsahující žádné nulové body jmenovatele. Potom funkce f je holomorfní na $\Omega\setminus\{z_1\}$ a $z_1 \in \operatorname{Int}\gamma$, takže podle Věty 9.14 platí

$$\int_\gamma \frac{z^{m-1}}{1+z^n}\,dz = 2\pi i\Big(-\frac{1}{n}z_1^m\Big) = \frac{-2\pi i}{n}z_1^m. \tag{9.12}$$

Ovšem současně máme

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\gamma_3} f(z)\,dz, \tag{9.13}$$

přičemž

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_0^r f(t)\,dt.$$

Dále máme, že $\div\gamma_3$ je dána parametrizací tz_1^2 pro $t\in[0,r]$, takže vzhledem ke skutečnosti $z_1^{2n}=1$ je

$$\int_{\gamma_3} f(z)\,dz = -\int_0^r \frac{(z_1^2 t)^{m-1}}{1+t^n z_1^{2n}} z_1^2\,dt = -z_1^{2m}\int_0^r \frac{t^{m-1}}{1+t^n}\,dt = -z_1^{2m}\int_0^r f(t)\,dt.$$

Protože

$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right| \leqslant \sup_{z\in[\gamma_2]}|f(z)|\,L(\gamma_2) = \sup_{z\in[\gamma_2]}|f(z)|\,\frac{2\pi r}{n}$$

a $\lim_{r\to\infty}\sup_{z\in[\gamma_2]}|f(z)| = 0$, protože poloměr γ_2 je větší než 1 dává $\left|\frac{z^{m-1}}{1+z^n}\right| \leqslant \frac{|z|^{m-1}}{|z|^n-1}$. Zkombinováním těchto výpočtů obdržíme pro $r\to\infty$ rovnost

$$\frac{2\pi i}{n}z_1^m = (1-z_1^{2m})\int_0^\infty f(t)\,dt \quad\text{neboli}\quad \int_0^\infty f(t)\,dt = \frac{2\pi i}{n(z_1^{2m}-1)}z_1^m.$$

Jelikož platí

$$\frac{z_1^m}{z_1^{2m}-1} = \frac{1}{z_1^m - z_1^{-m}} = \Big(e^{i\pi m/n} - e^{-i\pi m/n}\Big)^{-1} = \Big(2i\sin\frac{\pi m}{n}\Big)^{-1},$$

takže

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi m}{n}}.$$

Zejména pro $m\in(0,1)$ a $n=1$ máme

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi m}{n}}.$$

Tento výsledek byl znám (samozřejmě při použití jiného postupu) již v roce 1743, na což narážel zmíněný Poissonův komentář. ▲

Ta pětice dříve zmíněných kroků je to jediné, co máme v obecném případě k dispozici. Neexistuje žádný univerzální návod, jakou volit funkci (ačkoli je to *většinou* zřejmé) ani jakou zvolit křivku γ. Různé integrály vyžadují různé volby a vše do značné míry závisí na naší početní zkušenosti a invenci. Nicméně existují některé třídy integrálů, pro které lze univerzální vzorec odvodit. Ty si uvedeme v další části.

Věta 9.16

Nechť funkce f je holomorfní v $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ *a spojitá pro* $z \in \overline{\mathbb{C}_+} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ *s výjimkou konečného počtu izolovaných singularit neležících na reálné ose. Jestliže*

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in\overline{\mathbb{C}_+}}} z f(z) = 0 \tag{9.14}$$

a integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ *existuje, potom platí*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{w\in\mathbb{C}_+} \operatorname{res}_w f.$$

Důkaz. Uvažme Jordanovu cestu $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2$, kde $\gamma_1(t) = t$, $t \in [-R, R]$, a $\gamma_2(t) = R\,e^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Protože funkce f má pouze konečný počet singularit, existuje $\widetilde{R}$ takové, že tyto singularity leží uvnitř $K(0, \widetilde{R})$. Pak pro $R > \widetilde{R} > 0$ jsou splněny požadavky Věty 9.14 (resp. její slabší formulace) a platí tedy

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\substack{\omega\in\mathbb{C}_+ \\ \omega\in\operatorname{Int}\gamma}} \operatorname{res}_\omega f. \tag{9.15}$$

Pak

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(t)\,dt \xrightarrow{\text{(v.p.)}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt \quad \text{pro } R \to \infty$$

a současně

$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right| \leqslant \sup_{z\in[\gamma_2]} |f(z)|\, L(\gamma_2) = \pi \times R \times \sup_{\substack{|z|=R \\ z\in\overline{\mathbb{C}_+}}} |f(z)| \to 0 \quad \text{pro } R \to \infty$$

dle předpokladu (9.14). ∎

Poznámka. Podmínky Věty 9.16 jsou splněny např. pro racionální lomenou funkci $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, kde stupeň polynomu ve jmenovateli je alespoň o 2 vyšší než stupeň polynomu v čitateli a současně f nemá póly na reálné ose (tj. kořeny polynomu $q(z)$ neleží v $\mathbb{R}$). Existence $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ v tomto případě plyne ze skutečnosti

$$\lim_{x\to\infty} x^2 f(x) = \begin{cases} 1, & \text{liší-li se stupně polynomu právě o 2,} \\ 0, & \text{je-li stupeň ve jmenovateli vyšší alespoň o 3.} \end{cases}$$

Příklad 9.3. Určeme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx.$$

Řešení. Primitivní funkci pro $f(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$ lze určit např. pomocí substituce $x = t^2$ (podle návodu pro binomické integrály), což vede na racionální lomenou funkci $\frac{t^5}{1+t^8}$, což ale není nic příjemného…

My využijeme Větu 9.16. Funkce $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$ má v $\mathbb{C}_+$ dva póly $z_1 = e^{i\pi/4}$ a $z_2 = iz_1$, které jsou řádu 1. Podle Důsledku 9.13(ii) platí

$$\operatorname{res}_{z_1} f = \frac{\left[z^2\right]_{z=z_1}}{\left[4z^3\right]_{z=z_1}} = \frac{1}{4z_1} \quad \text{a} \quad \operatorname{res}_{z_2} f = \cdots = \frac{1}{4z_2}.$$

Jelikož předpoklady Věty 9.16 jsou splněny (viz předchozí poznámku), platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{2\pi i}{4}\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right) = \frac{\pi i}{2}\left(e^{-i\pi/4} - i\,e^{-i\pi/4}\right) = \frac{\pi i}{2}(1-i)\overline{e^{i\pi/4}} =$$
$$= \frac{\pi i}{2}(1-i)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi i}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)^2 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

▲

Příklad 9.4. Výsledek příkladu s $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx$ můžeme v případě lichého m a $n = 2q$ získat také pomocí Věty 9.16. Potom totiž platí

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx.$$

Položíme-li $f(z) = \frac{z^{m-1}}{1+z^n}$ jsou splněny předpoklady Věty 9.16, přičemž f má v $\mathbb{C}_+$ jednoduché póly v bodech $z_k = \tilde{z}_0^{2k+1}$ pro $k \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$, kde $\tilde{z}_0 := e^{i\pi/n}$. Platí $\operatorname{res}_{z_k} f = -\frac{z_k^m}{n}$. Jelikož

$$\sum_{k=0}^{q-1} z_k^m = \tilde{z}_0^m \sum_{k=0}^{q-1} \tilde{z}_0^{2mk} = \tilde{z}_0^m \frac{\tilde{z}_0^{mn}-1}{\tilde{z}_0^{2m}-1} = \frac{(-1)^m - 1}{\tilde{z}_0^m - \tilde{z}_0^{-m}} = \frac{-2}{\tilde{z}_0^m - \tilde{z}_0^{-m}}$$

a $\tilde{z}_0^m - \tilde{z}_0^{-m} = 2i\sin\frac{\pi m}{n}$, dostáváme

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx = \pi i \sum_{w\in\mathbb{C}_+} \operatorname{res}_w f = -\frac{\pi i}{n}\sum_{k=0}^{q-1} z_k^m = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi m}{n}}.$$

▲

Příklad 9.5. Ukažte, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6+1} = \frac{2\pi}{3}.$$

▲

Příklad 9.6. Ukažte, že

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^4} = \frac{5\pi}{32a^7}$$

pro $a \in \mathbb{R}$. ▲

Příklad 9.7. Ukažte, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+4x+13)^2}\,dx = -\frac{\pi}{27}.$$

▲

Tentokrát v následujícím tvrzení odvodíme vzorec pro jeden vlastní integrál.

Věta 9.17

Nechť $R(x,y)$ *je komplexní racionální lomená funkce pro* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *tj.* $R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ *pro komplexní polynomy* $P(x,y)$ *a* $Q(x,y)$ *v* $\mathbb{R}^2$. *Nechť dále platí* $Q(x,y) \neq 0$ *pro všechna* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *takové, že* $x^2 + y^2 = 1$. *Potom platí*

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\,dx = 2\pi \sum_{|w|<1} \operatorname{res}_w f,$$

kde $f(z) := \frac{1}{z} R\big(\frac{1}{2}(z + 1/z), \frac{1}{2i}(z - 1/z)\big)$.

Důkaz. Funkce $R(\cos x, \sin x)$ je spojitá na $\mathbb{R}$. takže uvedený integrál jistě existuje. Položme $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Potom $\cos t = (z + z^{-1})/2$ a $\sin t = (z - z^{-1})/(2i)$, takže

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\,dx = \int_\gamma \frac{1}{iz} R\big((z + z^{-1})/2, (z - z^{-1})/(2i)\big)\,dz = \frac{1}{i}\int_\gamma f(z)\,dz =$$
$$\overset{\text{Věta 9.16}}{=} \frac{1}{i} \times 2\pi i \sum_{|\omega|<1} \operatorname{res}_\omega f = 2\pi \sum_{|\omega|<1} \operatorname{res}_\omega f,$$

kde $f(z) := \frac{1}{z} R\big((z + z^{-1})/2, (z - z^{-1})/(2i)\big)$. ∎

V souvislosti s předchozí větou bývá obvykle uváděn následující příklad.

Příklad 9.8. Určeme

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2p\cos x + p^2}$$

pro $p \in \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$.

Řešení. V tomto případě máme

$$R(x,y) = \frac{1}{1 - 2px + p^2},$$

takže

$$f(z) = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1 - 2p\,\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) + p^2} = \frac{1}{z - pz^2 - p + p^2 z} = \frac{1}{(z-p)(1-pz)}.$$

Funkce f má tedy jednoduché póly v $z_1 = p$ a $z_2 = 1/p$. Je-li $|p| < 1$, pak $z_1 \in \operatorname{Int}\gamma$ a $z_2 \in \operatorname{Ext}\gamma$, zatímco pro $|p| > 1$ je $z_1 \in \operatorname{Ext}\gamma$ a $z_2 \in \operatorname{Int}\gamma$. Současně podle Důsledku 9.13(ii) máme

$$\operatorname{res}_{z_1} f = \frac{1}{\big[1 - 2pz + p^2\big]_{z=z_1}} = \frac{1}{1 - 2pp + p^2} = \frac{1}{1 - p^2},$$
$$\operatorname{res}_{z_2} f = \frac{1}{\big[1 - 2pz + p^2\big]_{z=z_2}} = \frac{1}{1 - 2 + p^2} = \frac{1}{p^2 - 1},$$

tj. rezidua se liší pouze znaménkem a totéž platí i pro hledaný integrál, neboť

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2p\cos x + p^2} = \begin{cases} \frac{2\pi}{1-p^2}, & |p| < 1, \\ \frac{2\pi}{p^2-1}, & |p| > 1 \end{cases}$$

neboli

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1-2p\cos x+p^2} = \frac{2\pi}{1-p^2}\,\operatorname{sgn}(1-|p|).$$

▲

Příklad 9.9. Vypočtěte

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(p+\cos x)^2}\,dx$$

pro $p>1$. ▲

Příklad 9.10. Ukažte, že

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2x)}{a^2+b^2-2ab\cos x}\,dx = \frac{2\pi a^2}{b^2(b^2-a^2)}$$

pro $b>a>0$. ▲

Příklad 9.11. Ukažte, že

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+a\cos x} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$$

pro $|a|<1$. ▲

Příklad 9.12. Ukažte, že

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3x}{5-4\cos x}\,dx = \frac{\pi}{12}.$$

▲

Na závěr uvedeme ještě tři další vzorce pro výpočet nevlastních integrálů.

Věta 9.17A

Nechť funkce $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ je holomorfní v $\mathbb{C}$ s výjimkou konečného počtu izolovaných singularit, přičemž na reálné ose připouštíme pouze jednoduché póly. Nechť dále $m>0$ a $\lim_{z\to\infty} f(z)=0$. Jestliže f nabývá na reálné ose pouze reálných hodnot a jestliže integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(mx)\,dx$ existuje, pak

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(mx)\,dx = \operatorname{Re}\left\{2\pi i \sum_{\operatorname{Im}\omega>0} \operatorname{res}_\omega[f(z)\,e^{imz}] + \pi i \sum_{\operatorname{Im}\omega=0} \operatorname{res}_\omega[f(z)\,e^{imz}]\right\}.$$

Podobně pokud f nabývá na reálné ose pouze reálných hodnot a integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(mx)\,dx$ existuje, pak

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(mx)\,dx = \operatorname{Im}\left\{2\pi i \sum_{\operatorname{Im}\omega>0} \operatorname{res}_\omega[f(z)\,e^{imz}] + \pi i \sum_{\operatorname{Im}\omega=0} \operatorname{res}_\omega[f(z)\,e^{imz}]\right\}.$$

Splňuje-li funkce f uvedené předpoklady a jsou-li póly na reálné ose tvaru $(2m+1)k\pi/2$ (resp. $m\pi/k$) pro $m\in\mathbb{Z}$, pak uvedené integrály existují.

Důkaz. Ne. ∎

Příklad 9.13. Vypočtěte

$$I_c = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx \quad a \quad I_s = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+4}\,dx.$$

Řešení. Máme

$$f_c(z) = \frac{1}{x^2+1} \quad a \quad f_s(z) = \frac{1}{x^2+4}.$$

První funkce má jednoduché póly v $\pm i$ a druhá funkce $\pm 2i$. Obě funkce splňují podmínku $\lim_{z\to\infty} f_c(z) = 0 = \lim_{z\to\infty} f_s(z)$, takže oba uvedené integrály existují. V horní polorovině leží pouze póly i a $2i$ s hodnotami reziduí

$$\operatorname{res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^{iz}}{(z-i)(z+i)} = \frac{e^{-1}}{2i} \quad a \quad \operatorname{res}_{z=2i} f(z) = \lim_{z\to i}(z-2i)\frac{e^{2iz}}{(z-2i)(z+2i)} = \frac{e^{-4}}{4i}.$$

Proto dle Věty 9.17A platí

$$I_c = \operatorname{Re}\left\{2\pi i\frac{e^{-1}}{2i}\right\} = \pi e^{-1} \quad a \quad I_s = \operatorname{Im}\left\{2\pi i\frac{e^{-4}}{4i}\right\} = 0.$$

Podobně lze ukázat, že obecně platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{n^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{n}e^{-kn} \quad a \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{n^2+x^2}\,dx = 0$$

pro libovolné $k, n > 0$. ▲

Příklad 9.14. Ukažte, že

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

▲

Příklad 9.15. Vypočtěte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+x+1}\,dx \quad a \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2+x+1}\,dx.$$

Řešení. Využijeme Větu 9.17A, kde zvolíme $m = 1$ a

$$f(z) = \frac{z}{z^2+z+1}.$$

Pak $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ a funkce $f(z)$ má pouze jednoduché póly $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, takže uvedené integrály existují. Jelikož

$$\operatorname{res}_{z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} f(z)\,e^{iz} = \frac{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{-\sqrt{3}/2}\left(\cos(1/2)-i\sin(1/2)\right)}{i\sqrt{3}},$$

platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+x+1}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\, e^{-\sqrt{3}/2}\left(\sqrt{3}\cos(1/2)+\sin(1/2)\right)$$

a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2+x+1}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\, e^{-\sqrt{3}/2}\left(-\cos(1/2)+\sqrt{3}\sin(1/2)\right).$$

▲

Příklad 9.16. Ukažte, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2-2x+10}\,dx = \frac{\pi}{3}\, e^{-3}\left(3\cos 1+\sin 1\right)$$

a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2-2x+10}\,dx = \frac{\pi}{3}\, e^{-3}\left(\cos 1-3\sin 1\right).$$

▲

Příklad 9.17. Ukažte, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 5x}{(x^2+1)^2(x^2+4)}\,dx = \frac{\pi}{18}\left(16\, e^{-5}+e^{-10}\right).$$

▲

Věta 9.17B

Nechť funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní v $\mathbb{C}$ s výjimkou konečného počtu izolovaných singularit neležících v intervalu $(0,\infty)$. Nechť $a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ je takové, že

$$\lim_{z\to\infty} |z|^a\, f(z) = 0 = \lim_{z\to 0} |z|^a\, f(z).$$

Jestliže integrál $\int_0^\infty x^{a-1} f(x)\,dx$ existuje, potom

$$\int_0^\infty x^{a-1} f(x)\,dx = \frac{\pi}{\sin \pi a} \sum_{\omega\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)} \operatorname{res}_\omega[(-z)^{a-1} f(z)],$$

kde $(\cdot)^{a-1}$ značí jednoznačnou větev mocniny $(\cdot)^{a-1} = e^{(a-1)\,[\ln|\cdot|+i\arg(\cdot)]}$. Zejména, je-li Q racionální lomená funkce, která nemá póly na intervalu $[0,\infty)$ a stupeň polynomu ve jmenovateli je vyšší než stupeň polynomu v čitateli, pak pro $a \in (0,1)$ příslušný nevlastní integrál existuje a platí pro něj

$$\int_0^\infty x^{a-1} Q(x)\,dx = \frac{\pi}{\sin \pi a} \sum_{\omega\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)} \operatorname{res}_\omega[(-z)^{a-1} Q(z)].$$

Důkaz. Ne. ■

Příklad 9.18. Vypočtěme

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{x^2+b^2}\,dx$$

pro $|a|<1$ a $b>0$.

Řešení. Úpravou daného integrálu do tvaru

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{x^2+b^2}\,dx = \int_0^\infty x^{a-1}\,\frac{x}{x^2+b^2}\,dx$$

vidíme, že můžeme využít Větu 9.17B s funkcí

$$Q(z)=\frac{z}{z^2+b^2},$$

která má pouze jednoduché póly v bodech $\pm ib$. Proto daný integrál existuje a z rovností

$$\operatorname{res}_{z=ib}\frac{(-z)^{a-1}z}{z^2+b^2} = \lim_{z\to ib}(z-ib)\frac{(-z)^{a-1}z}{z^2+b^2} = \frac{1}{2}\,e^{(a-1)(\ln b+i\pi/2)},$$
$$\operatorname{res}_{z=-ib}\frac{(-z)^{a-1}z}{z^2+b^2} = \lim_{z\to -ib}(z+ib)\frac{(-z)^{a-1}z}{z^2+b^2} = \frac{1}{2}\,e^{(a-1)(\ln b-i\pi/2)}$$

plyne, že

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{x^2+b^2}\,dx = \int_0^\infty x^{a-1}\,\frac{x}{x^2+b^2}\,dx = \frac{\pi}{2\sin\pi a}\left(e^{(a-1)(\ln b+i\pi/2)}+e^{(a-1)(\ln b-i\pi/2)}\right) = \frac{\pi b^{a-1}}{2\cos(\pi a/2)}.$$

▲

Integrál

$$\int_{-\infty}^\infty f(e^x)\,e^{ax}\,dx$$

pro $a\in(0,1)$ se pomocí substituce $u=e^x$ převede na integrál

$$\int_0^\infty f(u)\,u^{a-1}\,du,$$

který byl popsán ve Větě 9.17B.

Příklad 9.19. Ukažte, že pro $a\in(0,1)$ je

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}.$$

▲

Příklad 9.20. Ukažte, že pro $a\in(0,1)$ je

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ax}}{1+e^{2x}}\,dx = \frac{\pi}{2\sin(\pi a/2)}.$$

▲

Věta 9.17C

Nechť funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní v* $\mathbb{C}$ *s výjimkou konečného počtu izolovaných singularit neležících v intervalu* $(0,\infty)$. *Nechť dále* f *nabývá na reálné ose pouze reálných hodnot a nechť*

$$\lim_{z\to\infty}\left[z\ln^2|z|\,f(z)\right] = 0 = \lim_{z\to 0}\left[z\ln^2|z|\,f(z)\right].$$

Jestliže existuje $\int_0^\infty \ln(x)\,f(x)\,dx$, *potom*

$$\int_0^\infty \ln(x)\,f(x)\,dx = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\sum_{\omega\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)} \mathrm{res}_\omega[f(z)\,\log_0^2 z].$$

Podobně pokud existuje $\int_0^\infty f(x)\,dx$, *pak*

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = -\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Im}\sum_{\omega\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)} \mathrm{res}_\omega[f(z)\,\log_0^2 z].$$

zejména, je-li Q *racionální lomená funkce, která nemá póly na intervalu* $[0,\infty)$, *na reálné ose nabývá pouze reálných hodnot a stupeň polynomu ve jmenovateli je alespoň o 2 vyšší než stupeň polynomu v čitateli, pak oba příslušné integrály existují a platí pro ně*

$$\int_0^\infty \ln(x)\,Q(x)\,dx = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\sum_{\omega\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)} \mathrm{res}_\omega[Q(z)\,\log_0^2 z]$$

a

$$\int_0^\infty Q(x)\,dx = -\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Im}\sum_{\omega\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)} \mathrm{res}_\omega[Q(z)\,\log_0^2 z].$$

Důkaz. Ne. ∎

Příklad 9.21. Vypočtěte

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

Řešení. Jelikož $Q(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$ splňuje všechny uvedené podmínky Věty 9.17C a má pouze póly druhého řádu pro $\pm i$, plyne z rovností

$$\mathrm{res}_{z=i}\frac{\log_0^2 z}{(z^2+1)^2} = \lim_{z\to i}\left((z-i)^2\frac{\log_0^2 z}{(z^2+1)^2}\right)' = \lim_{z\to i}\frac{2\frac{(z+1)^2}{z}\log_0 z - 2(z+i)\log_0^2 z}{(z+i)^4} = -\frac{\pi}{4}+\frac{\pi^2}{16}i$$

a

$$\mathrm{res}_{z=-i}\frac{\log_0^2 z}{(z^2+1)^2} = \frac{3\pi}{4}-\frac{9\pi^2}{16}i,$$

že

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x^2+1)^2}\,dx = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi^2}{16}i+\frac{3\pi}{4}-\frac{9\pi^2}{16}i\right) = -\pi/4.$$

▲

Příklad 9.22. Ukažte, že

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

▲